CHAPITRE 1

Distributions

- Motivation
- Espaces de fonctions infiniment dérivables sur Ω
- Autour de la masse de Dirac
- Définition des distributions
- Passage à la limite
- Multiplication
- Dérivation

François Dubois, janvier 2000, édition août 2007, 23 pages.

(I) Distributions.

1) Motivation

- La notion de fonction d'une ou plusieurs variables réelles la plus classique est en fait la notion d'application ou de champ. Si Ω est (pour fixer les idées) un ouvert de $\mathbb{R}^N$, une fonction f sur Ω est une application réelle

(1.1) $\Omega \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$.

A chaque point x, on doit évaluer la valeur numérique du champ $f(\cdot)$.

- Cette notion traditionnelle de fonction doit être revue si on utilise la notion moderne d'intégration au sens de Lebesgue. Pour donner un sens à l'intégrale $\int_\Omega f(x)\,dx$ ou à la norme L^2 de f :

(1.2) $$\|f\|_0^2 = \int_\Omega |f|^2(x)\,dx$$

on sait (voir par exemple le chapitre "Intégration" du cours d'Analyse de JM Bony) qu'il suffit que la valeur numérique $f(x)$ soit définie "presque partout" sur Ω. Cette notion est nécessaire ; elle permet de faire des espaces $L^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ des espaces de Banach, espaces vectoriels normés complets pour la norme $L^1(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega |f(x)|\,dx \in \mathbb{R}$ et (1.2) respectivement. De plus, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert ; le produit scalaire

$$(1.3) \qquad (f,g) = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$$

permet d'y faire de la "géométrie" comme dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ habituel"

- Le prix à payer est qu'on ne dispose plus de la valeur ponctuelle $f(x)$ pour tout x de l'ouvert Ω. Par contre pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ [ie pour tout compact $K \subset \Omega$, $f|_K \in L^1(K)$, l'intégrale $\int_K |f(x)|\,dx$ est finie donc $\int_K f(x)\,dx$ a un sens] et $x \in \Omega$, on dispose de valeurs moyennes de f dans un voisinage compact $V(x)$ de mesure arbitrairement petite

$$(1.4) \qquad \langle f \rangle_{V(x)} = \frac{1}{|V(x)|} \int_{V(x)} f(y)\, dy .$$

Si on introduit la fonction caractéristique $1_{V(x)}$ du voisinage $V(x)$, la relation (1.4) s'écrit encore

$$(1.5) \qquad \langle f \rangle_{V(x)} = \frac{1}{|V(x)|} \int_\Omega f(y)\, 1_{V(x)}(y)\, dy .$$

Pour évaluer $f(\bullet)$ au point x, on calcule une moyenne telle que (1.5) ; ce faisant, on fait agir $f(\bullet)$ contre la fonction caractéristique $1_{V(x)}$.
Les valeurs ponctuelles n'ont plus d'intérêt en tant que telles ; ce qui importe est la façon

dont $f(\cdot)$ agit sur d'autres fonctions

2) Espace des fonctions infiniment dérivables sur Ω.

- Nous définissons rapidement dans ce paragraphe l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ (noté aussi $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$) des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ et à support compact dans Ω. C'est l'ensemble des fonctions "sur lesquelles vont agir" de nouvelles fonctions "généralisées", ou distributions.

- Si $\Omega \ni x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}$ est une fonction (une application !) définie sur Ω, son support $\mathrm{supp}\,\varphi$ est l'adhérence de l'ensemble des points x où elle n'est pas nulle :

(1.6) $\quad \mathrm{supp}\,\varphi = \mathrm{adh}_{\mathbb{R}^N}\Big[\{ x \in \Omega, \varphi(x) \neq 0 \} \Big]$.

on dit que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est à support compact dans l'ouvert Ω si il existe un compact K inclus dans Ω tel que le support de φ soit inclus dans K :

(1.7) $\quad \mathrm{supp}\,\varphi$ compact : $\exists K$ compact $\subset \Omega$, $\mathrm{supp}\,\varphi \subset K$

- Par définition, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables (de classe $\mathcal{C}^\infty$) dont le support est un compact de K

(1.8) $\quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \begin{cases} \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \\ \exists K \text{ compact} \subset K, \ \mathrm{supp}\,\varphi \subset K. \end{cases}$

Une question naturelle est de savoir si il existe de telles fonctions. La réponse est <u>oui</u>. On considère par exemple un point $a \in \Omega$ et un réel $R>0$ assez petit de sorte que la boule de centre a et de rayon R soit incluse dans l'ouvert Ω. On pose

$$(1.9) \qquad \varphi_a(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x-a|^2 - R^2}\right) & \text{si } |x-a|<R \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

C'est un exercice classique de vérifier que φ_a est infiniment dérivable sur Ω; son support est la boule fermée de centre a et rayon R. Donc $\varphi_a \in \mathcal{D}(\Omega)$.

- Les fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sont infiniment dérivables. Pour un multi indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, ie

$$(1.10) \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N, \quad \alpha_j \in \mathbb{N}$$

on introduit sa longueur $|\alpha|$:

$$(1.11) \qquad |\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j$$

et la dérivée de φ d'ordre α:

$$(1.12) \qquad (\partial^\alpha \varphi)(x) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x^{\alpha_N}}\right)\varphi(x), \quad x \in \Omega.$$

L'opérateur de dérivation ∂^α est bien défini de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$

- La <u>topologie</u> de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est (très) compliquée à définir et à manipuler (on ne peut pas tout avoir ! A la fois un espace qui sa-

-lise la dérivation à tout ordre et qui serait associé à une distance $d(\bullet,\bullet)$ pour définir une topologie sous-jacente). En pratique, on a besoin de définir la convergence d'une *suite* de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$. La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sous les *deux* conditions suivantes

$$\boxed{(1.13)\quad \exists K \text{ compact } \subset \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{supp} \varphi_n \subset K}$$

(le support des fonctions φ_n est dans un compact *fixe* de Ω) et

$$\boxed{(1.14)\quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ \partial^\alpha \varphi_n \text{ converge uniformément vers} \\ \partial^\alpha \varphi \text{ sur le compact } K. \end{array} \right.}$$

($\sup\limits_{x\in K} \{ |\partial^\alpha \varphi_n - \partial^\alpha \varphi|(x) \}$ tend vers 0 si $n \to \infty$, ce pour tout multiindice α). De plus l'opérateur ∂^α *est continu* $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$

- La convergence de φ_n vers φ dans l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est une notion très forte (convergence de la fonction et de toutes ses dérivées; "enfermement" dans un même compact K). Par contre, si on remarque d'abord que

$$(1.15)\qquad \mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

on peut, pour une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, étudier sa convergence non pour la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$, mais pour celle de $L^2(\Omega)$, i.e associée à la norme (1.2). En fait, pour f donnée de façon *arbitraire* dans $L^2(\Omega)$, on peut trouver une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui converge (dans $L^2(\Omega)$) vers f. L'espace

$\mathcal{D}(\Omega)$ [dont on se demandait si il est vide ou pas!] est en fait un gros sous espace de $L^2(\Omega)$, c'est un sous-espace dense de $L^2(\Omega)$ (figure 1)

(1.16) $\quad \mathrm{adh}_{L^2}\{\mathcal{D}(\Omega)\} = L^2(\Omega)$

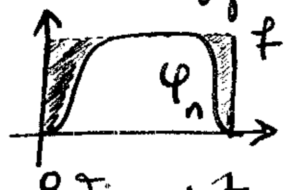

Figure 1

ce qui signifie aussi

$$\boxed{(1.17) \quad \forall f \in L^2(\Omega), \exists \varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega), \ \|f-\varphi_n\|_0 \to 0 \text{ si } n \nearrow \infty}$$

☐ on prendra garde de bien préciser lorsqu'on a "$\varphi_n \to \varphi$" si c'est pour la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ (auquel cas on a (1.13) et (1.14) et φ est une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$) ou pour celle de $L^2(\Omega)$ [pour fixer les idées ici], auquel cas on a $\int_\Omega |\varphi_n-\varphi|^2 dx \to 0$ et φ peut être une fonction de $L^2(\Omega)$ arbitraire!

- Une conséquence de la propriété (1.16) est la caractérisation suivante de la fonction nulle :

(1.18) $\left(f \in L^2, \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\right) \Rightarrow (f=0)$;

si le produit scalaire de $f \in L^2(\Omega)$ par une fonction infiniment dérivable à support compact arbitraire est nul, alors f est nulle. La preuve de cette propriété est élémentaire à partir de la relation (1.17). On décompose la norme de f sous la forme

$$\|f\|_0^2 = \int_\Omega f\,(f-\varphi_n)\,dx + \int_\Omega f\varphi_n\,dx$$

où $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ est une suite qui approche f pour la topologie $L^2(\Omega)$ (i.e. φ_n vérifie (1.17)). Compte tenu de (1.18), l'intégrale $\int_\Omega f(x)\,\varphi_n(x)\,dx$ est nulle, et, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la relation précédente montre que

$\|f\|_0^2 \leqslant \|f\|_0 \, \|f-\varphi_n\|$ qui tend vers zéro si $n \nearrow \infty$,

ce qui établit que f est nulle. $\square$

- Plus généralement, si f, g sont deux fonctions appartenant à $L^1_{loc}(\Omega)$, l'égalité

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

entraîne $f=g$. On touche du doigt ce qui était annoncé dans l'introduction : deux fonctions sont <u>égales</u> (ici deux fonctions de $L^1_{loc}(\Omega)$) si elles agissent de la même façon sur les fonctions très régulières $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Une fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ est entièrement caractérisée par la donnée des intégrales

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad f \in L^1_{loc}(\Omega),\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

qui remplacent dans ce contexte les valeurs ponctuelles $x \mapsto f(x)$ du champ $f(\bullet)$. Nous retenons

$$(1.19)\ \boxed{\left\{ \forall f, g \in L^1_{loc}(\Omega),\ \left(\int_\Omega f\varphi\,dx = \int_\Omega g\varphi\,dx,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right) \Longrightarrow (f=g). \right.}$$

3) Autour de la masse de Dirac

- Nous regardons dans ce paragraphe quelques limites singulières du point de vue des fonctions classiques, qui motivent l'extension qui sera donnée au paragraphe suivant.
- On regarde d'abord sur $\mathbb{R}^N$ la fonction $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur la boule $B(0,1/n)$ égale à une constante, nulle ailleurs, et d'intégrale 1 :

$$(1.20) \qquad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|B(0,1/n)|} & \text{si } x \in B(0,1/n) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $|B(0,1/n)|$ est le volume dans $\mathbb{R}^N$ de $B(0,1/n)$.

Pour $x \neq 0$ fixé, $f_n(x)$ converge simplement vers 0 et $f_n(0)$ tend vers l'infini. Donc si f_n tend vers une fonction f dans un espace classique de fonctions (par exemple L^2), la limite simple coïncide nécessairement avec la limite fonctionnelle, ce qui entraîne que f est identiquement nulle.
Pourtant, si φ est une fonction infiniment dérivable à support compact dans $\mathbb{R}^N$, elle est continue sur $\mathbb{R}^N$ et on a

$$(1.21) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|B(0,1/n)|}\int_{B(0,1/n)} \varphi(x)\,dx \to \varphi(0). \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En effet, la différence $\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)$ s'écrit aussi $\frac{1}{|B(0,1/n)|}\int_{B(0,1/n)} (\varphi(x)-\varphi(0))\,dx$, donc

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} f_n(x)\varphi(x)\,dx - \varphi(0)\right| \leqslant \frac{1}{|B(0,1/n)|}\sup_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|\int_{B(0,1/n)}|x|\,dx$$

$$\leqslant \frac{C_N}{n}\sup_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|$$

et la relation (1.21) est établie. Nous verrons plus loin qu'on ne peut pas écrire $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $f(\bullet)$ fonction donnée de $L^1_{loc}(\Omega)$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ résiste à cette première tentative de convergence.

- on s'intéresse ensuite à la dérivée de la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$. A partir des valeurs ponctuelles, cette fonction est dérivable partout sauf en $x=0$ et sa dérivée peut s'exprimer à l'aide de la fonction $H(\bullet)$ de Heaviside

$$\boxed{(1.22) \qquad H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}}$$

on a

$$(1.23) \qquad \frac{d}{dx}|x| = -1 + 2\,H(x) \qquad x \neq 0 .$$

- si on essaie de dériver une fois de plus on peut par exemple régulariser la fonction donnée à la relation (1.23) avec une fonction affine continue g_k :

$$(1.24) \qquad g_k(x) = \begin{cases} -1 & x < -1/k \\ kx & |x| \leq 1/k \\ +1 & x > 1/k \end{cases} .$$

La dérivée de g_k se calcule facilement et on trouve

$$(1.25) \qquad \frac{dg_k}{dx} = 2\, f_k , \qquad k \geq 1$$

où $f_k(\bullet)$ a été défini à la relation (1.20) dans $\mathbb{R}^N$.
Comme f_k n'a a priori pas de limite, il faut renoncer dans le cadre de la notion classique de fonction à donner un sens à la dérivée seconde de la fonction valeur absolue.

4) Définition des distributions

- Par définition, une distribution T est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans l'ouvert Ω :

$$(1.26) \quad T : \ \mathcal{D}(\Omega) \ni \varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R} .$$

La notion de "forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$" n'est pas facile à définir et n'a pas besoin d'être parfaitement maîtrisée en pratique pour aller vers les applications. Nous renvoyons au Cours d'Analyse de J. M. Bony ou au traité de référence de L. Schwartz (Distributions, Hermann).

- Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$, ie

$$(1.27) \left\{ \begin{array}{l} \langle T, \lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle + \mu \langle T, \varphi_2 \rangle \\ \qquad\qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) \end{array} \right.$$

est pour nous une distribution sur Ω, et on écrit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si, pour toute suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ convergeant au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$ vers une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ [voir les deux conditions (1.13) et (1.14)], la suite numérique $\langle T, \varphi_n \rangle$ converge vers le nombre $\langle T, \varphi \rangle$.

$$(1.28) \quad T \in \mathcal{D}'(\Omega) : \ \forall \varphi_n \to \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega), \ \langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$$

La continuité est donc exprimée dans le cadre restrictif de stabilité de T lors du passage à la limite dans l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$.

• La première propriété à vérifier est que les distributions généralisent la notion de fonction. En effet, toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ [et en particulier toute fonction $f \in L^2(\Omega)$] définit une distribution T_f {notation qui cèdera sa place au chapitre suivant pour la simple lettre "f"} via la condition

$$(1.29) \quad \langle T_f , \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

Si φ_n tend, dans $\mathcal{D}(\Omega)$, vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, les intégrales sur Ω au second membre de la relation (1.29) sont en fait à considérer sur un compact fixé K (condition (1.13)) et la suite φ_n converge uniformément sur K vers la fonction continue φ (condition (1.14)). Par suite la suite $(f \varphi_n)$ converge dans $L^1(K)$ vers $(f\varphi)$:

$$\int_K |f\varphi_n - f\varphi|\, dx \leq \Big(\sup_K |\varphi_n - \varphi| \Big) \int_K |f|\, dx$$

qui est arbitrairement petit pour n assez grand et T_f est bien "continue" au sens que nous avons défini à la relation (1.28). On a donc l'inclusion

$$(1.30) \qquad L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

via la définition (1.29) :

$$(1.31) \qquad L^1_{loc}(\Omega) \ni f \longmapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega) .$$

- Le second exemple est issu des remarques du paragraphe 3 et permet d'introduire la <u>masse de Dirac</u> δ_a. Soit a un point arbitraire de l'ouvert Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$). On pose [suivant Dirac (1930)]:

(1.32) $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ a \in \Omega.$

La relation (1.32) definit une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors pour tout point $a \in \Omega$, $\varphi_n(a)$ converge vers $\varphi(a)$ puisqu'on a convergence uniforme de φ_n dans tout compact de Ω, donc $\langle \delta_a, \varphi_n \rangle$ converge vers $\langle \delta_a, \varphi \rangle$ et δ_a est bien une distribution : $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

- On peut généraliser cet exemple avec un peu plus de géométrie. Soit Γ une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^N$ incluse dans Ω (Γ est une courbe ou une surface incluse dans Ω pour fixer les idées). Alors δ_Γ est la <u>mesure</u> superficielle portée par Γ:

(1.33) $\langle \delta_\Gamma, \varphi \rangle = \int_\Gamma \varphi(x)\, d\gamma(x) \quad , \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$

On intègre φ sur la variété Γ. C'est une opération linéaire. Si φ_n converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, la convergence est uniforme sur tout compact, donc sur Γ et les intégrales $\int_\Gamma \varphi_n\, d\gamma$ convergent vers l'intégrale $\int_\Gamma \varphi\, d\gamma$.

- Le point essentiel à remarquer est que la masse de Dirac δ_a [et plus généralement toute mesure superficielle δ_Γ] n'est pas une fonction, c'est à dire n'est pas une distribution de la forme T_f introduite à la relation (1.29)

(1.34) $\quad \forall a \in \Omega, \forall f \in L^1_{loc}(\Omega), \ \delta_a \neq T_f$.

Imaginons qu'on puisse représenter la masse de Dirac δ_a (relation (1.32)) par une distribution T_f (relation (1.29)). On a alors

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Considérons l'ouvert Ω' obtenu en enlevant le point a de l'ouvert Ω :

(1.35) $\quad \Omega' = \Omega \setminus \{a\}$.

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$, alors φ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ après extension par 0 au point a. La fonction f appartient indifféremment à $L^1_{loc}(\Omega)$ ou $L^1_{loc}(\Omega')$ [le singleton $\{a\}$ est de mesure nulle!] et la condition $\int_{\Omega'} f\varphi\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ entraîne que f est nulle, compte tenu de la caractérisation de $f \in L^1_{loc}$ par ses intégrales $\int f\varphi\,dx$ vue en (1.19). Comme $\{a\}$ est de mesure nulle, il est équivalent de dire que $f=0$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$ ou $L^1_{loc}(\Omega')$. Mais alors $\langle \delta_a, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ce qui contredit la définition (1.32)! $\blacksquare$

5) Passage à la limite

- De même qu'il est fondamental de pouvoir définir la limite dans $\mathcal{D}(\Omega)$ d'une suite de fonctions φ_n de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, la limite T d'une suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à l'aide de la topologie de l'espace dual. De façon précise, si $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une suite de distribution et T une distribution fixée dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on dit que T_n tend vers T pour $n \to \infty$ si, pour toute fonction "test" $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge vers le nombre $\langle T, \varphi \rangle$:

$$(1.36)\ \left\{ \begin{array}{l} (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega) \text{ converge vers } T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ si } n \to \infty \end{array} \right.$$

- on dispose même d'un critère suffisant de convergence au sens précédent : si la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ est telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite réelle, on note $\langle T, \varphi \rangle$ cette limite. Alors T est une distribution ie est en fait continue sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$. Ce critère permet de définir des distributions comme limites d'autres distributions T_n, pourvu que la suite $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge simplement (ie pour toute fonction test φ).

$$(1.37)\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } T_n \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \text{limite réelle},\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \\ \text{Alors } T \text{ défini par } \langle T, \varphi \rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle \text{ appartient} \\ \text{à } \mathcal{D}'(\Omega). \end{array} \right.$$

- on peut revenir sur l'exemple proposé au paragraphe 3. La suite f_n définie par la relation (1.20) est telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\langle T_{f_n}, \varphi \rangle$ converge vers $\varphi(0)$ (relation (1.21)). Donc elle a une limite au sens des distributions, et cette limite (la masse δ_0 de Dirac à l'origine) est elle-même une distribution, compte tenu de la relation (1.37). L'impasse dans laquelle nous nous trouvions (la suite de fonctions f_n ne peut converger que vers la fonction nulle) laisse la place à un résultat positif : la suite de distributions T_{f_n} converge vers la masse de Dirac en 0 (cf (1.21)) :

(1.38) $\quad T_{f_n} \to \delta_0$ si $n \to \infty$, f_n donné en (1.20).

- Un autre exemple moins simple de distribution est la ~~valeur~~ principale de Cauchy de $1/x$. On pose d'abord

(1.39) $$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{|x| \geq 1/n} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

et, compte tenu de la relation

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{1/n}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx \quad , n \geq 1, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

la suite $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, vers un nombre réel qui est par définition la valeur principale de $1/x$:

(1.40) $\langle VP\,1/x, \varphi\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{|x|\geq 1/n} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

la relation (1.37) et la remarque précédente assurent que $VP\,1/x \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

- D'un point de vue plus général, la convergence dans l'espace des distributions est une conséquence de la convergence dans les espaces L^2 et L^1_{loc} :

(1.41) $\left(f_n \to f \text{ dans } L^1_{loc} \{\text{resp } L^2\}\right) \Rightarrow \left(T_{f_n} \to T_f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right)$

Lorsque $f_n \to f$ dans $L^1_{loc}(\Omega)$, l'intégrale $\int_K |f_n - f|\,dx$ tend vers 0 sur tout compact fixé de Ω. On a donc, quitte à agrandir K de façon à ce qu'il contienne le support de φ :

$$\left|\int_\Omega (f_n - f)\varphi\,dx\right| \leq \int_K |f_n - f|\,|\varphi|\,dx \leq \left(\sup_K |\varphi|\right) \int_K |f - f_n|$$

qui établit la propriété lorsque f_n converge vers f dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^2(\Omega)$, la propriété résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\int_\Omega (f_n - f)\varphi\,dx\right| \leq \|f - f_n\|_0\, \|\varphi\|_0$ ☐

6) Multiplication

- On peut multiplier une distribution T par une fonction très régulière f (techniquement $f \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$, f est infiniment dérivable mais son support n'est pas a priori compact dans l'ouvert Ω). On procède d'abord formellement, "comme si" la distribution T était une fonction

• On a même un résultat plus fin de convergence. Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $L^1_{loc}(\Omega)$ qui converge presque partout vers f et telle qu'il existe $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$|f_k(x)| \leqslant g(x) \quad pp(x), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

alors la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens des distributions.

Ce résultat étend le théorème de convergence dominée de Lebesgue, où l'on suppose $f_k \in L^1(\Omega)$ au lieu de $L^1_{loc}(\Omega)$ et $g \in L^1(\Omega)$ également.

ordinaire $x \mapsto T(x)$) :

$$\int_\Omega (f(x)\,T(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega T(x)\,(f(x)\,\varphi(x))\,dx\,,$$

utilisant là les propriétés usuelles de commutativité et d'associativité de la multiplication des nombres réels. Compte tenu de la relation précédente, il est naturel de poser

$$(1.42)\quad \langle (fT), \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle\,,\quad T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ f \in \mathcal{E}^\infty(\Omega),\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\,.$$

- Le membre de droite de la relation (1.42) a un sens car pour $f \in \mathcal{E}^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, le produit $(f\varphi)$ est à support compact et est indéfiniment dérivable, donc appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. Il est facile de vérifier que $\varphi \mapsto \langle T, f\varphi \rangle$ définit bien une distribution, car si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, le produit $f\varphi_n$ tend vers $f\varphi$ dans le même espace. $\blacksquare$

- on a aussi stabilité du produit $f_n T_n$ lorsque f_n tend vers f uniformément ainsi que toutes ses dérivées sur tout compact de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors le théorème assure que le produit $f_n T_n$ tend vers fT dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$(1.43)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Big(f_n \to f \text{ dans } \mathcal{E}^\infty(\Omega)\ \left[\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f \text{ uniformement sur tout compact de } \Omega\,,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \right] \text{ et } T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \Big) \\ \qquad \Longrightarrow \left(f_n T_n \to fT \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \right) \end{array} \right).$$

- Un résultat à méditer en fin de paragraphe : si f n'est pas régulière ou $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, le produit fT n'a pas de sens dans la théorie exposée ici.

7) Dérivation.

- On procède avec la dérivation comme pour la multiplication, avec en tête que la dérivation doit étendre les relations que l'on connaît bien pour les fonctions dérivables. Or si f et φ sont deux fonctions régulières continuement dérivables sur $\overline{\Omega}$, on dispose de la formule de Green $\quad f, \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$)

$$(1.44) \qquad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx + \int_{\partial\Omega} f\varphi n_j\,d\sigma(x)$$

où le bord $\partial\Omega$ est supposé "assez régulier" et n_j désigne la normale extérieure au domaine Ω. Lorsque φ est infiniment dérivable et à support compact dans Ω ($\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$), le terme de bord du membre de droite de (1.44) est nul, et on a simplement :

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx, \quad f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

- La relation ci-dessus prend un sens dès que (membre de droite de la) $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, donc pour une distribution de la forme T_f. Le fait qu'elle demeure vraie pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ consiste à faire un choix précis pour la dérivée au sens des distributions d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ arbitraire.

Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit sa dérivée $\partial T/\partial x_j$ par la relation suivante

$$\boxed{(1.45) \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \; T \in \mathcal{D}'(\Omega), \; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$$

Le membre de droite de (1.45) définit bien une distribution car l'opérateur de dérivation $\partial/\partial x_j$ est linéaire continu de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (comme on l'a vu en (1.14)).

- Le premier test de cohérence de la relation (1.45) consiste à vérifier que pour f régulière ($f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset L^1_{loc}(\Omega)$) la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_j} T_f$ coïncide bien avec la distribution "affectée" à la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_j}$

$$(1.46) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j} T_f = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}} \quad , \; f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \, .$$

Cette propriété est claire compte tenu de (1.23), (1.44) et (1.45) ; la dérivée des distributions généralise bien la dérivée usuelle des fonctions régulières.
- La question suivante est liée à l'exploration de l'itération de la relation (1.45). On peut dériver la distribution $\partial T/\partial x_j$ par rapport à $\partial/\partial x_k$, et recommencer encore! Les distributions sont toutes infiniment dérivables (!) et on a

$$(1.47) \left\{ \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \; T \in \mathcal{D}'(\Omega), \; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \; \alpha \in \mathbb{N}^N . \right.$$

Donc pour toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, la distribution T_f est infiniment dérivable (appliquer la relation (1.47) !) et on retient que <u>toute fonction $f \in L^1_{loc}$ est indéfiniment dérivable au sens des distributions</u>

- On ne résiste alors pas à la tentation de dériver deux fois la fonction "valeur absolue" (cf (1.23)), donc de dériver la fonction de Heaviside (relation (1.22)). On a le calcul suivant :

$$\left\langle \frac{dH}{dx}, \varphi \right\rangle = -\left\langle H, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle = -\int_0^\infty \frac{d\varphi}{dx}\, dx = \varphi(0) - \varphi(\infty),$$

$= \varphi(0)$ car φ a support compact,

c'est à dire

$$\boxed{(1.48) \qquad \frac{dH}{dx} = \delta_0 \,.}$$

La dérivée au sens des distributions de la fonction "marche ascendante" de Heaviside est égale à la masse de Dirac à l'origine.

- De façon plus générale, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ avec des sauts aux points a_j (avec $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ pour fixer les idées) :

$$(1.49) \qquad [f]_j = \Big(\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(a_j + \varepsilon)\Big) - \Big(\lim_{\eta \searrow 0} f(a_j - \eta)\Big),$$

un calcul facile d'intégration par parties montre que

$$(1.50) \qquad \frac{d}{dx} T_f = T_{\frac{df}{dx}} + \sum_{j=1}^{k} [f]_j \, \delta_{a_j},$$

relation qui généralise (1.46).

- Le lecteur "fana" pourra établir que $\frac{d}{dx}\log|x| = vp(1/x)$, au sens des distributions ... Nous renvoyons à l'abondante littérature des automaticiens pour une utilisation approfondie de l'algèbre de dérivation construite au paragraphe précédent. D'un point de vue plus analytique, on remarque que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_j}$ opère continûment sur $\mathcal{D}'(\Omega)$: si $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\frac{\partial T_n}{\partial x_j} \to \frac{\partial T}{\partial x_j}$ au sens des distributions :

$$\boxed{(1.51)\quad \left(T_n \to T \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right) \Rightarrow \left(\frac{\partial T_n}{\partial x_j} \to \frac{\partial T}{\partial x_j} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)\right)}$$

- Nous terminons par un exercice classique

$$(1.52)\quad \left(T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ et } \frac{dT}{dx} = 0\right) \Rightarrow \left(T = \text{cste}\right).$$

La preuve consiste à écrire $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sous la forme d'une dérivée plus une autre fonction. On introduit une fonction fixée $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale égale à 1 : $\int_{\mathbb{R}} \chi\, dx = 1$; on a alors

$$(1.53)\quad \varphi(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \chi + \frac{d}{dx}\left\{\int_{-\infty}^{x}\left[\varphi - \left(\int_{\mathbb{R}}\varphi\right)\chi\right] d\theta\right\}$$

et il est facile de voir que la fonction $x \mapsto \int_{-\infty}^{x}\left(\varphi - \left(\int\varphi\right)\chi\right)$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ puisqu'elle est à support compact dans $\mathbb{R}$. On a donc $\left\langle T, \frac{d}{dx}\left\{\int_{-\infty}^{x}\left[\varphi - \left(\int_{\mathbb{R}}\varphi\right)\chi\right] d\theta\right\}\right\rangle =$
$= -\left\langle T', \int_{-\infty}^{x}\left[\varphi - \left(\int\varphi\right)\chi\right] d\theta\right\rangle = 0$ au vu de (1.52),

donc $\langle T, \varphi \rangle = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx\right) \langle T, \chi \rangle$, et T est proportionnelle à la fonction $x \mapsto 1$, ce qui établit la propriété. □