Chapitre 2

Transformation de Fourier

- Définition
- Propriétés de la transformée de Fourier
- Ce qui n'a pas été dit

François Dubois, janvier 2000, édition août 2007, 14 pages.

II Transformation de Fourier

1) Définition

- La transformée de Fourier définit une isométrie de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^N)$, muni d'une structure de produit scalaire (hermitien dans ce chapitre), ie

(2.1) $\quad (f,g) = \int_{\mathbb{R}^N} \bar{f}(x)\, g(x)\, dx, \quad f,g \in L^2(\mathbb{R}^N).$

mais une véritable difficulté conceptuelle est que la fonction

(2.2) $\quad \mathbb{R}^N \ni \xi \mapsto (Ff)(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) \in \mathbb{C}$

n'est pas définie par une formule algébrique simple. On doit commencer par le cas où $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$\boxed{(2.3) \quad \hat{f}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, e^{-ix\cdot\xi}\, dx, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ \xi \in \mathbb{R}^N.}$$

- Dans le cas où $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, le membre de droite de la relation (2.3) a un sens, définit une fonction $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$ qui est continue et tend vers 0 si ξ tend vers l'infini.

$$\boxed{(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}),\ \hat{f}(\xi) \to 0 \text{ si } |\xi| \to \infty, \\ \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1} / (2\pi)^{N/2}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^N). \end{array} \right.}$$

On peut vérifier simplement la continuité de $\hat{f}$ grâce au théorème de convergence dominée. Soit ξ un point fixé de $\mathbb{R}^N$ et $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^N$ qui converge vers ξ. Alors la suite de fonctions

$$x \mapsto f(x)\exp(-i\,x\cdot\zeta_k)$$

converge simplement vers la fonction $x \mapsto f(x)e^{-ix\cdot\xi}$ et est de plus dominée par la fonction intégrable $|f|$: $|f(x)\exp(-i\,x\cdot\zeta_k)| \leqslant |f(x)|$.

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure qu'alors la suite des intégrales $\hat{f}(\zeta_k)$ converge vers l'intégrale $\hat{f}(\xi)$. Cette propriété est vraie pour toute suite $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ξ, donc $\hat{f}$ est continue en $\xi\in\mathbb{R}$.

- Pour montrer que $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 si $|\xi| \equiv \left(\sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2\right)^{1/2}$ tend vers l'infini, on approche d'abord $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ par g continue à support compact (ce qui est toujours possible même avec $g\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ au besoin) ; si $\|f-g\|_1 \leqslant (2\pi)^{N/2}\frac{\varepsilon}{2}$, on a alors $\|\hat{f}-\hat{g}\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On peut supposer g à support compact dans une boule de rayon R. Pour $\xi\neq 0$ fixé, soit i l'indice où $\max_j |\xi_j|$ est atteint. On a alors $|\xi| \leqslant \sqrt{N}\,|\xi_i|$ et par ailleurs

$$(2\pi)^{N/2}\hat{g}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\left(x_1\xi_1+\dots+\left(x_i\xi_i - \frac{\pi}{\xi_i}\xi_i\right)+x_{i+1}\xi_{i+1}+\dots\right)} g(x)\,dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\, g\left(x+\left(0,\dots,0,\tfrac{\pi}{\xi_i},0,\dots\right)\right)dx$$

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi}\left[g(x) - g\left(x + \left(0,\dots,0,\frac{\pi}{\xi_i},0,\dots\right)\right)\right]dx$$

Donc

$$|\hat{g}(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{|B(0,R)|}{(2\pi)^{N/2}} \sup_{|y-x|\leqslant \frac{\pi}{|\xi_i|}} |g(x)-g(y)|$$

$$(2.5)\quad |\hat{g}(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{|B(0,R)|}{(2\pi)^{N/2}} \sup_{|y-x|\leqslant \pi\sqrt{N}/|\xi|} |g(x)-g(y)|\,.$$

Comme $g(\cdot)$ est uniformément continue car à support compact, le membre de droite de (2.5) peut être rendu inférieur à $\varepsilon/2$ dès que $\pi\sqrt{N}/|\xi|$ est plus petit que $\eta>0$, ie pour $|\xi|$ assez grand, ce qui établit la propriété. $\blacksquare$

• Exemples fondamentaux.

$$(2.6)\quad (\mathcal{F}\chi_{]a,b[})(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i\xi\frac{a+b}{2}} \frac{\sin\frac{b-a}{2}\xi}{\xi}$$

$$(2.7)\quad \left[\mathcal{F}\left(H(x)e^{-\alpha x}\right)\right](\xi) = \frac{1}{\alpha+i\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\ \alpha>0.$$

$$\boxed{(2.8)\quad \left[\mathcal{F}\left(e^{-\alpha|x|}\right)\right](\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\xi^2}\,,\quad \alpha>0.}$$

$$\boxed{(2.9)\quad \left[\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)\right](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)\,,\quad a>0}$$

On note ici une propriété fondamentale de la transformée de Fourier : plus $f(\cdot)$ est régulière et plus la transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ tend rapidement vers zéro si $|\xi|$ tend vers l'infini..

- Lorsque f est assez régulière, et plus précisément pour $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on dispose de la "formule d'inversion de Fourier" :

$$\boxed{(2.10)\quad f(x) = (\overline{\mathcal{F}}\hat{f})(x) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\, d\xi, \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^N \\ f \in L^1(\mathbb{R}^N) \\ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}}$$

Ceci montre que, au moins lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la transformée de Fourier est inversible, et de plus

$$\boxed{(2.11)\qquad \mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}.}$$

De plus, si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $f(\cdot)$ est continue par application à $\overline{\mathcal{F}}$ de ce qui a été dit en (2.4). La relation (2.10) n'est pas a priori utilisable pour les exemples (2.6) et (2.7). Il convient donc d'étendre l'opérateur $\mathcal{F}$ (les opérateurs $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ en fait) à un cadre plus large de fonctions.

- Une autre propriété essentielle de la transformation de Fourier est qu'elle diagonalise l'opérateur de <u>translation</u>. Soit $a \in \mathbb{R}^N$ et T_a l'opérateur $L^1(\mathbb{R}^N) \to L^1(\mathbb{R}^N)$ défini par

$$(2.12)\quad L^1(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto T_a f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ (T_a f)(x) = f(x-a).$$

on a alors

$$(2.13)\quad [\mathcal{F}(T_a f)](\xi) = e^{-ia\xi}\,(\mathcal{F}f)(\xi), \quad \begin{matrix} a \in \mathbb{R}^N \\ \xi \in \mathbb{R}^N \end{matrix}.$$

En ce qui concerne la dérivation, si $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\boxed{(2.14) \quad \left[\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right](\xi) = (i\xi_j)(\mathcal{F}f)(\xi) \quad , f \in \mathcal{E}' \cap L^1, \partial_k f \in L^1 .}$$

• La preuve (par parties) formelle de la relation (2.14) consiste à intégrer sur une boule de centre 0 et rayon R grâce à la formule de Green:

$$\int_{B(0,R)} \frac{\partial f}{\partial x_j} e^{-ix\xi} dx = \int_{\partial B(0,R)} f n_j e^{-ix\xi} d\sigma(x) + \int_{B(0,R)} i\xi_j f e^{-ix\cdot\xi} dx$$

puis à faire tendre R vers l'infini. Le problème est de s'assurer que l'intégrale de bord tend vers zéro, i.e. que $\int_{|x|=R} |f| \, d\sigma(x)$ tend bien vers zéro si $R \to \infty$. A une dimension d'espace, la propriété est facile à établir :

$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(\theta) d\theta$, et pour $x \to +\infty$, l'intégrale $\int_0^\infty f'(\theta) d\theta$ prend un sens car $\int_0^\infty |f'| d\theta$ converge. Par suite $f(x)$ a une limite si $x \to +\infty$ et cette limite est nécessairement nulle car $\int_0^\infty |f| d\theta$ a un sens. On raisonne de même pour $x \to -\infty$, ce qui établit la propriété dans ce cas. Dans le cas multidimensionnel, il faut utiliser avec soin le théorème de Fubini. Nous renvoyons aux notes de cours de JM Bony (Méthodes mathématiques pour les Sciences Physiques, École Polytechnique, 1997).

- Si f est régulière (de classe $\mathcal{C}^m$) et dont toutes les dérivées sont intégrables (appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^N)$), on applique le résultat (2.4) à $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$, dont la transformée de Fourier est $-\xi_j \xi_k \hat{f}(\xi)$ et tend vers 0 si $|\xi|$ tend vers l'infini (cf (2.4)). Par récurrence, tout monôme en ξ de degré total $\leq m$ multiplié par $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 si $|\xi| \to \infty$, donc

$$\boxed{(2.15)\quad |\xi|^m \hat{f}(\xi) \to 0 \text{ si } |\xi| \to \infty,\ f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N),\ \partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ |\alpha| \leq m .}$$

- La transposée du résultat précédent est que si f est "assez décroissante" pour $|x|$ tendant vers l'infini, la transformée de Fourier devient régulière :

$$(2.16)\qquad \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = -i\, [\mathcal{F}(x_j f(\bullet))](\xi),\ f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ x_j f(\bullet) \in L^1$$

On dérive formellement sous le signe somme la relation (2.3) par rapport à ξ_j. On obtient ainsi une intégrale $\int_{\mathbb{R}^N} (-i x_j) f(x) \exp(-i x \xi)\, dx$ qui a un sens si $\int_{\mathbb{R}^N} |x_j f(\bullet)|\, dx < \infty$. Le résultat résulte alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue, dans sa version "dérivation sous le signe somme" [Si $\varphi : \mathbb{R}^N \times I \ni (x, \lambda) \mapsto \varphi(x, \lambda) \in \mathbb{R}$ est telle que (i) pour tout λ appartenant à l'intervalle I de $\mathbb{R}$, $x \mapsto \varphi(x, \lambda)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$, (ii) la dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ existe presque partout pour $x \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\lambda \in I$, (iii) et les dérivées partielles sont pp(x) $\in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\lambda \in I$, majorées par une fonction $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto h(x) \in \mathbb{R}$ intégrable : $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x,\lambda)\right| \leqslant h(x)$, $\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|\,dx < \infty$, alors la fonction $I \ni \lambda \mapsto F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x,\lambda)\,dx \in \mathbb{R}$ est dérivable et $\frac{dF}{d\lambda} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x,\lambda)\,dx$]. $\square$

- Le résultat précédent s'étend à un ordre m arbitraire.

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(x \mapsto (1+|x|^m) f(x)\right) \in L^1(\mathbb{R}^N) \\ \qquad \Longrightarrow \quad \widehat{f} \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N). \end{array} \right.$$

- Nous vérifions maintenant que le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^N)$ (2.1) est invariant par transformation de Fourier :

$$\boxed{(2.18) \quad (\widehat{f}, \widehat{g}) = (f, g) \quad \text{si } f, \widehat{f}, g, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^N).}$$

La preuve de ce résultat repose d'abord sur la formule (2.10) d'inversion de Fourier, qui entraîne que f est bornée, donc appartient à $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, ce qui donne un sens aux deux membres de la relation (2.18). Nous avons donc, compte tenu de (2.10) :

$$(2.19) \quad (f, g) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(x)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi}\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi \right\} dx .$$

De plus, la fonction $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x,\xi) \mapsto \overline{f}(x)\, g(\xi) \in \mathbb{C}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^{2N})$ compte tenu des hypothèses et du théorème de Fubini [.../...

Fubini [si $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \ni (x,y) \mapsto \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$ est intégrable ($\varphi \in L^1(\mathbb{R}^{p+q})$), pour presque tout $y \in \mathbb{R}^q$, la fonction $\mathbb{R}^p \ni x \mapsto \varphi(x,y) \in \mathbb{R}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^p$ ($\varphi(\bullet, y) \in L^1(\mathbb{R}^p)$ pp$(y) \in \mathbb{R}^q$), la fonction $\mathbb{R}^q \ni y \mapsto \psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x,y)\,dx \in \mathbb{R}$ définie presque partout pour $y \in \mathbb{R}^q$ est intégrable sur $\mathbb{R}^q$ ($\psi \in L^1(\mathbb{R}^q)$) et on a :

$$\int_{\mathbb{R}^q} dy \left\{ \int_{\mathbb{R}^p} dx\, \varphi(x,y) \right\} = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} \varphi(x,y)\,dx\,dy \Big] ,$$

on peut échanger l'ordre des intégrales dans la relation (2.19) :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{f}(x) \left[\int_{\mathbb{R}^N} e^{+ix\xi}\, \hat{g}(\xi)\, d\xi \right] dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} d\xi\, \hat{g}(\xi) \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} dx\, \overline{f(x)\, \exp(-ix\xi)} \right\}$$

ce qui montre la relation (2.18).

- Le résultat précédent s'étend avec l'hypothèse moins forte : $f, g \in L^1 \cap L^2$. Dans ce cas, $\hat{f}$ et $\hat{g}$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^N)$ et $(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g)$:

(2.20) $\quad (\hat{f}, \hat{g}) = (f, g) \quad , \quad f, g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$.

La preuve consiste à approcher f et g par convolution dans $L^1 \cap L^2$ de façon à utiliser le résultat (2.18) pour la suite approchante, puis de passer à la limite dans le produit scalaire.

- Nous disposons (enfin !) de tous les outils pour définir $\hat{f}$ lorsque f appartient à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^N)$. On approche $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$

par une suite $f_j \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ (ce qui est toujours possible, par exemple en posant $f_j = f\,\chi_{B(0,j)}$). Alors la suite des $\widehat{f_j}$ converge en moyenne quadratique vers une limite $\hat{f} = \mathcal{F}f$ qui ne dépend **pas** de la suite f_j ". On a le même résultat pour $\overline{\mathcal{F}}f$ et de plus

$$\boxed{(2.21)\left\{\begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^N) \ni f \mapsto \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N) \text{ est linéaire, bijective,} \\ \text{réalise une isométrie de } L^2(\mathbb{R}^N) \text{ sur lui-même, et} \\ \mathcal{F}^{-1} f = \overline{\mathcal{F}} f . \end{array}\right.}$$

- On note une nouvelle fois que la relation (2.3) ne définit **pas** $\hat{f}$ pour $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$: f n'appartient **pas** à $L^1(\mathbb{R}^N)$ a priori (elle n'est pas intégrable) et l'intégrale du membre de droite de (2.3) n'a pas de sens a priori. Par contre, si la suite d'intégrales

$$(2.22) \qquad \hat{f}_R(\xi) = \int_{|x| \le R} e^{-ix\xi} f(x)\,dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^N),\ R > 0$$

converge pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ lorsque R tend vers l'infini, alors la limite vaut $\hat{f}(\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^N$:

$$(2.23)\left\{\begin{array}{l} \left(\hat{f}_R(\xi) \text{ converge si } R \uparrow \infty \text{ pp}(\xi) \in \mathbb{R}^N \right) \\ \qquad \Rightarrow \left(\hat{f}(\xi) = \lim\limits_{R \uparrow \infty} \hat{f}_R(\xi), \ \text{pp}(\xi) \in \mathbb{R}^N \right). \end{array}\right.$$

2) Propriétés de la transformation de Fourier.

- Les propriétés vues dans le cas de fonctions f intégrables s'étendent sans difficulté au cas où f appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$. En particulier l'opérateur de translation T_a défini par la relation (2.12), c'est à dire ici :

(2.24) $\quad L^2(\mathbb{R}^N) \ni f \longmapsto T_a f \in L^2(\mathbb{R}^N), (T_a f)(x) = f(x-a)$

est mis sous forme diagonale grâce à la transformation de Fourier ; on a (cf aussi (3.13)) :

(2.25) $\begin{cases} [\mathcal{F}(T_a f)](\xi) = e^{-ia\cdot\xi}\,(\mathcal{F}f)(\xi), \\ \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^N),\ a \in \mathbb{R}^N,\ \forall (\xi) \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$

- Pour la dérivation, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$ ainsi que toutes ses dérivées, on a (cf aussi (3.14)) :

$$\boxed{(2.26) \quad \left[\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right](\xi) = i\,\xi_j\,(\mathcal{F}f)(\xi),\ f \in \mathcal{C}^1 \cap L^2,\ \partial_k f \in L^2.}$$

- Notons aussi le <u>principe d'incertitude</u> (Heisenberg) si $f \in L^2(\mathbb{R})$ est de plus $\|f\|_0 = 1$, la mesure $|f|^2\,dx$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il est naturel de supposer définis la moyenne m_f, la variance V_f et l'écart type σ_f :

(2.27) $\quad m_f = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} x\,|f|^2\,dx\ ; \quad V_f = \int_{\mathbb{R}^N} |x - m_f|^2\,|f|^2\,dx\ ; \quad \sigma_f = \sqrt{V_f}\,.$

(si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $|x|\,f \in L^2(\mathbb{R})$ par exemple)

Alors le "principe d'incertitude" énonce qu'on ne peut à la fois "concentrer" les mesures de probabilité de f et de $\hat{f}$:

$$(2.28)\left\{\begin{array}{l} \boxed{\sigma_f \cdot \sigma_{\hat{f}} \geqslant \frac{1}{2},\ f\in L^2(\mathbb{R}),\ \|f\|_0 = 1,\ f\in \mathcal{C}^1,\ f'\in L^2(\mathbb{R}),\ x f \in L^2(\mathbb{R})} \end{array}\right.$$

et l'égalité a lieu si et seulement si f est une gaussienne (exemple (2.9)).

- La preuve de (2.28) consiste d'abord à remarquer que $m_{\hat{f}}$ et $\sigma_{\hat{f}}$ ont un sens car si $f\in H^1(\mathbb{R})$, la relation (2.26) montre que $|\xi|\hat{f}$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$. On peut de plus supposer $m_f = 0$ compte tenu de la relation (2.25) ; la transformée de Fourier de la fonction $y\mapsto f(y-m_f)$ est identique à celle de f à un coefficient unimodulaire près, ce qui ne change pas la loi de probabilité $|\hat{f}|^2 d\xi$. De même en échangeant les rôles de f et $\hat{f}$, on peut supposer que $m_{\hat{f}} = 0$. On a alors $\sigma_f = \|xf\|_0$ et $\sigma_{\hat{f}} = \|\xi \hat{f}\|_0 = \|f'\|_0$ compte tenu de (2.26). La fonction $x\mapsto x|f|^2 = (xf)(\bar{f})$ est intégrable comme produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ et sa dérivée $|f|^2 + 2x\,\mathrm{Re}(\bar{f}f')$ l'est aussi car xf et f' appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$. Donc (voir la preuve par exemple page F5) $x|f|^2 \to 0$ si $x\to\infty$ et $\int_{-R}^{R} x\frac{d}{dx}|f|^2 dx = [x|f|^2]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R}|f|^2 dx \to -1$ si $R\to\infty$.

Comme $\int_{\mathbb{R}} x \frac{d}{dx} |f|^2 \, dx = 2 \,\mathrm{Re}\,(xf, f')$, on a, compte tenu de l'inégalité de Cauchy Schwarz dans le champ complexe (produit scalaire hermitien)

(2.29) $-1 = -2\,\mathrm{Re}(xf, f') \leqslant 2 \, \|xf\|_0 \, \|f'\|_0 = 2\sigma_f \, \sigma_{\hat{f}}$

avec égalité si et seulement si les fonctions $-xf$ et f' sont proportionnelles avec un coefficient de proportionnalité $\lambda > 0$: $f' = -\lambda x f$. Ce sont les gaussiennes et la propriété est établie. $\square$

3) Ce qui n'a pas été dit.

- Des oublis volontaires de propriétés fondamentales de la transformation de Fourier. Son action sur le produit de convolution tout d'abord :

(2.30) $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, g(y)\, dy\,,\quad x\in\mathbb{R}^N$

On a

$$\boxed{(2.31)\quad F(f*g)(\xi) = (2\pi)^{N/2}\, (\mathcal{F}f)(\xi)\, (\mathcal{F}g)(\xi)}$$

avec la normalisation que nous avons choisie. La relation (2.31) est indispensable pour établir les points techniques non détaillés plus haut (formule d'inversion de Fourier, etc.)

- La transformée de Fourier de la masse de Dirac doit aussi être considérée. Il faut pour cela reprendre la théorie des distributions grâce à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ de Schwartz des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide ainsi que toutes les dérivées, montrer qu'on a une isométrie de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$

(2.32) $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

puis étendre l'opérateur F au dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ des distributions tempérées $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \longmapsto \langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{(2.33)\quad \langle FT, \varphi\rangle = \langle T, F\varphi\rangle\,,\quad T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)\,,\ \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}$$

on a alors (sur $\mathbb{R}$ pour simplifier)

$$\langle F\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, F\varphi\rangle = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$$

$$= \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi\rangle \text{ , soit}$$

$$\boxed{(2.34) \qquad F\,\delta_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.}$$

Plus généralement,

$$(2.35) \qquad F\,\delta_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-iax} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$(2.36) \qquad \overline{F}\,\delta_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ibx} \qquad x \in \mathbb{R}$$

- L'extension de la relation $F_0 \overline{F} = \overline{F}_0 F = Id$ à l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ permet alors le calcul suivant

$$F(\overline{F}\,\delta_b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, F(e^{ibx}) = \delta_b \text{ , d'où}$$

$$\boxed{(2.37) \qquad F(e^{ibx}) = \sqrt{2\pi}\;\delta_b \quad , \; b \in \mathbb{R} \, ,}$$

relation qu'on serait bien en peine de trouver au vu de la seule expression intégrale (2.3) !