Chapitre 3

Espaces de Sobolev

- Fonctions de carré intégrable
- Définition et premières propriétés
- Cas de l'espace $\mathbb{R}^N$
- Approximation de H^m, continuité
- Trace au bord
- Formule de Green
- Compacité

François Dubois, janvier 2000, édition août 2007, 39 pages.

(III) Espaces de Sobolev.

1) Fonctions de carré intégrable.

- On rappelle que l'espace $L^2(\Omega)$ est, pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, un espace de Hilbert (réel pour les applications traitées ici) ; il est muni d'un produit scalaire

$$(3.1) \quad (u,v)_0 = \int_\Omega u\, v\, dx\,, \quad u,v \in L^2(\Omega)$$

et la norme associée $\| \ \|_0$ (voir (1.2)) fait de $L^2(\Omega)$ un espace vectoriel normé <u>complet</u>. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme L^2, ie

$$(3.2) \quad \forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall p\in\mathbb{N},\ (n\geq N \Rightarrow \|u_n - u_{n+p}\| \leq \varepsilon)$$

alors elle converge vers une fonction $u\in L^2(\Omega)$, ie $\|u_n - u\|_0$ tend vers zéro si n tend vers l'infini.

- L'intérêt d'un espace de Hilbert est le théorème de <u>projection</u> sur les convexes fermés non vides. Soit K une partie convexe ($u,v\in K \Rightarrow [u,v] \equiv \{\theta u+(1-\theta)v,\ \theta\in[0,1]\}\subset K$), fermée ($\mathrm{adh}_{L^2} K = K$) et non vide de $L^2(\Omega)$. Alors il existe une application $P_K : L^2(\Omega)\ni u \mapsto P_K u \in K$ telle que

$$(3.3) \quad \|u - P_K u\|_0 \leq \|u-y\|\,, \quad \forall y\in K,\ u\in L^2(\Omega)$$

La projection $P_K u$ de $u\in L^2(\Omega)$ est aussi caractérisée par les inégalités d'angle obtus

$$\boxed{(3.4) \qquad v = P_K u \iff \begin{cases} v\in K \\ \mathrm{Re}\,(u-v,\, y-v) \leq 0\,, \quad \forall y\in K. \end{cases}}$$

- Dans un espace de Hilbert, on peut faire de la géométrie euclidienne "comme dans $\mathbb{R}^N$". Un cas particulier important du théorème de projection est celui où K est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega)$ [c'est alors clairement un convexe fermé non vide]. Le projecteur P_K sur le sous-espace K est alors le <u>projecteur orthogonal</u> sur K (pour le produit scalaire $L^2(\Omega)$). La décomposition

(3.5) $\qquad u = P_K u + (u - P_K u) \quad , u \in L^2(\Omega), K$ fermé

jointe à la caractérisation (2.4) montre que $u - P_K u$ est orthogonal à K et décrit l'orthogonal $K^\perp$ du sous espace fermé K.

$$\boxed{(3.6) \qquad L^2(\Omega) = K \oplus K^\perp \quad , K \text{ sous espace fermé de } L^2(\Omega).}$$

Nous conseillons au lecteur désireux d'un exposé didactique plus étendu de consulter les notes de cours d'Analyse Hilbertienne de L. Schwartz (Hermann, 1979).

- Une application importante de la décomposition orthogonale (3.6) est la vérification qu'un sous espace A de $L^2(\Omega)$ est dense. Dire que A est dense revient à dire que son adhérence $\overline{A}$ est égale à $L^2(\Omega)$. L'orthogonal $\overline{A}^{\perp} = A^{\perp}$ est alors nul, avec

$$(3.7) \qquad A^{\perp} = \{ y \in L^2(\Omega),\ (x,y) = 0 \ \forall x \in A \}$$

et on a le critère suivant

$$(3.8) \qquad A \text{ sous espace de } L^2. \quad \overline{A} = L^2(\Omega) \iff A^{\perp} = \{0\}.$$

- Une propriété très importante des espaces de Hilbert est que toute forme linéaire $\varphi \in (L^2(\Omega))'$ peut être "représentée" par un vecteur $\xi \in L^2(\Omega)$: le dual de $L^2(\Omega)$ est isomorphe à $L^2(\Omega)$ lui même, via (par exemple) l'isomorphisme

$$(3.9) \qquad L^2(\Omega) \ni \xi \longmapsto \big(L^2(\Omega) \ni x \longmapsto (\xi, x) \in \mathbb{C} \big) \in (L^2(\Omega))'$$

entre espaces de Hilbert (Théorème de Riesz).

- L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert <u>séparable</u> : il admet une suite dense. La décomposition (3.6), initiée à partir d'un vecteur unitaire arbitraire $e_1 \in L^2(\Omega)$ permet de construire une <u>base hilbertienne</u>, ie une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de vecteurs deux à deux orthogonaux et unitaires :

$$(3.10) \qquad (e_k, e_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et telle que l'adhérence de l'espace des suites finies $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j$, $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}^*$ est égale à $L^2(\Omega)$. Le critère (3.8) s'écrit ici :

$$(3.11) \qquad (u, e_j) \; \forall j \in \mathbb{N} \implies u = 0 .$$

Toute fonction $u \in L^2(\Omega)$ se décompose alors de façon unique sous la forme d'une série convergente en moyenne quadratique (pour la topologie de $L^2(\Omega)$)

$$(3.12) \quad \boxed{\begin{cases} u = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (e_k, u)\, e_k \\ \|u\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, u)|^2 < \infty \end{cases}}$$

- Nous approfondirons au chapitre 4 l'exemple des séries de Fourier où $\Omega =]0, L[$:

$$\boxed{(3.13) \qquad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \exp\left(2i\pi k \frac{x}{L}\right), \; f \in L^2(0,L)}$$

Mais ce n'est pas la seule base hilbertienne de $L^2(0,T)$, on a par exemple le développement en sinus :

$$\boxed{(3.14) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \; f \in L^2(0,L)}$$

qui joue un rôle important puisqu'il est composé de fonctions propres de l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2}$ avec condition de Dirichlet homogène

$$(3.15) \qquad -\frac{d^2}{dx^2}\left\{\sin \frac{k\pi x}{L}\right\} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{k\pi x}{L} .$$

- N'oublions pas, pour terminer, que deux fonctions u et v de $L^2(\Omega)$ sont "proches" au sens de la topologie de $L^2(\Omega)$ si elles le sont "en moyenne quadratique", ie si l'intégrale $\int_\Omega |u-v|^2 dx$ est petite. Rien n'est dit sur la "pente" de la fonction $(u-v)$ qui peut, elle, être "très grande".

2) Définition et premières propriétés.

- Les fonctions de $L^2(\Omega)$ sont dérivables au sens des distributions. Par contre la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_j} T_u$ pour $u \in L^2(\Omega)$, notée plus simplement $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, est une distribution qui n'est pas a priori une fonction (penser à la dérivée de la fonction de Heaviside, sur l'espace $L^2(-1,1) = L^2(]-1,1[)$).
Lorsque c'est le cas et que de plus, la fonction v_j qui permet de représenter la dérivée de u au sens des distributions est une fonction de $L^2(\Omega)$, ie

$$(3.16) \qquad \exists\, v_j \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} = T_{v_j} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

on dit que u appartient à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$:

$$\boxed{(3.17) \quad H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega),\ \forall j = 1, \dots, N \right\}.}$$

Cette définition doit être comprise de la manière suivante : $H^1(\Omega)$ est formé des fonctions u de carré intégrable dont la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ au sens des distributions est une fonction qui, de plus, est de carré intégrable.

- L'espace $H^1(\Omega)$ est une généralisation de l'espace $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ des fonctions continûment dérivables de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$: $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. Mais $H^1(\Omega)$ contient aussi d'autres fonctions. Pour $\Omega =]-1, +1[$ par exemple, l'espace $H^1(-1,1) \equiv H^1(]-1,1[)$ contient la fonction valeur absolue $]-1,1[\ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ [exercice laissé au lecteur!] La dérivée est une fonction discontinue qui appartient à $L^2(-1,1)$.

- Le résultat fondamental qui motive la définition (3.17) est qu'avec le produit scalaire $(u,v)_1$ défini par

$$(3.18) \quad (u,v)_1 = (u,v)_0 + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_0$$

[avec $(\,,\,)_0$ produit scalaire usuel de $L^2(\Omega)$ défini à la relation (2.1)], l'espace de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert :

$$\boxed{(3.19) \quad (H^1(\Omega), (\cdot,\cdot)_1) \text{ est un espace de Hilbert.}}$$

- Le point important est de démontrer que $H^1(\Omega)$ est effectivement complet, c'est à dire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme H^1, définie, bien entendu, par la relation

$$\boxed{(3.20) \qquad \|u\|_1 = \Big(\|u\|_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \big\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\big\|_0^2 \Big)^{1/2}, \; u \in H^1(\Omega)}$$

alors elle converge, dans $H^1(\Omega)$, vers une certaine fonction $u \in H^1(\Omega)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, elle est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, donc converge vers $u \in L^2(\Omega)$. De plus, chaque dérivée partielle $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définit une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui converge vers $v_j \in L^2(\Omega)$. Il reste à prouver que $\frac{\partial u}{\partial x_j} = v_j$ dans $L^2(\Omega)$ pour montrer le résultat. Mais la dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est une opération continue, si u_n tend vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$ tend vers $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ [voir (1.51)]. Comme u_n tend vers u dans $L^2(\Omega)$, u_n tends vers u dans $\mathcal{D}'$, donc $\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$ tend vers $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ au vu du point précédent. Par ailleurs, $\frac{\partial u_n}{\partial x_j}$ tend vers v_j dans $L^2(\Omega)$, donc dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Compte tenu de l'unicité de la limite, on a bien $\frac{\partial u}{\partial x_j} = v_j$ (pour tout entier j, $1 \leq j \leq N$) ; u_n converge vers u dans $H^1(\Omega)$, ce qui montre la propriété. $\square$

- L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. C'est donc une structure très riche pour étudier les fonctions dérivables. Toutefois, la dérivabilité doit être entendue en un sens faible (au sens des distributions), donc si la structure de l'espace $H^1(\Omega)$ est simple, les valeurs ponctuelles $\Omega \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}$ d'une fonction $u \in H^1(\Omega)$ peuvent être non bornées, comme le montre l'exemple suivant sur la boule $\Omega = B(0,R)$ $(0<R<1)$ de $\mathbb{R}^2$:

$$(3.21) \qquad u(x) = \left|\log|x|\right|^k, \quad 0<k<\tfrac{1}{2}, \quad x \in B(0,R) \subset \mathbb{R}^2.$$

- La fonction $u(\bullet)$ définie par la relation (3.21) appartient à $L^2(B(0,R))$ et la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ au sens des distributions est égale à la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ considérée d'un point de vue élémentaire. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(B(0,R))$, on a

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R |\log r|^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, r\, dr.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a (cf (1.44))

$$-\int_{\varepsilon<|x|<R} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \int_{\varepsilon<|x|<R} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi\, dx + \int_0^{2\pi} (u\varphi)(\varepsilon,\theta)\, n_j\, \varepsilon\, d\theta$$

L'intégrale de bord tend vers 0 si $\varepsilon \to 0$ car elle a le comportement de $\varepsilon|\log \varepsilon|^k$. On a de plus

$$\int_{\varepsilon<|x|<R} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi\right| dx \leq 2\pi \int_\varepsilon^R \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| |\varphi|\, r\, dr$$

$$\leq 2\pi \, \|\varphi\|_\infty \int_\varepsilon^R k\, |\log r|^{k-1}\, dr$$

et cette intégrale a une limite pour $\varepsilon \to 0$
dès que $k-1<0$ donc en particulier pour $0<k<1/2$.

La dérivée au sens des distributions de $u(\cdot)$ est donc égale à la dérivée au sens élémentaire. Il reste à vérifier, pour montrer l'appartenance de $u(\cdot)$ à $H^1(B(0,R))$, que l'intégrale $\int_{B(0,R)} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 dx$ converge. Or

$$\int_{B(0,R)} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 dx = 2\pi \int_0^R \left(k \frac{|\log r|^{k-1}}{r}\right)^2 r\,dr =$$

$$= 2\pi k^2 \int_0^R \frac{dr}{r\,|\log r|^{2-2k}}$$

et cette intégrale converge lorsque $2-2k>1$, i.e. pour $k<1/2$. On dispose donc d'une fonction $u(\cdot)$ qui appartient à $H^1(\Omega)$ et est <u>non bornée</u> au voisinage de 0 pour $k>0$!

- Nous retenons de l'exemple qui précède qu'en général, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ne sont <u>pas</u> continues !

$$\boxed{(3.22) \qquad H^1(\Omega) \not\subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \,,\ \Omega \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^N,\ N \geqslant 2} \;*$$

Pour préciser le la continuité éventuelle des fonctions dérivables, nous introduisons l'espace $H^m(\Omega)$ de façon analogue à $H^1(\Omega)$:

$$(3.23) \quad H^m(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ |\alpha| \leqslant m \Rightarrow \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \}$$

formé de toutes les fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m inclus sont effectivement des fonctions qui, de plus, appartiennent à $L^2(\Omega)$

* On a toutefois (voir plus loin) $H^1(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, Ω ouvert de $\mathbb{R}$.

Le produit scalaire $(u,v)_m$ de deux fonctions u et v de $H^m(\Omega)$ est défini par extension simple de la relation (3.18) :

$$(3.24)\quad (u,v)_m = \int_\Omega u\,v\,dx + \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega (\partial^\alpha u)(\partial^\alpha v)\,dx$$

et la norme $\|\bullet\|_m$ dans $H^m(\Omega)$ s'écrit sans difficulté :

$$(3.25)\qquad \|u\|_m = \Big(\|u\|_0^2 + \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_0^2 \Big)^{1/2}, \quad u \in H^m(\Omega).$$

- La fonction $]-1,1[\ \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ appartient à $H^1(-1,1) \equiv H^1(]-1,1[)$ mais n'appartient pas à $H^2(-1,1)$ car sa dérivée seconde (la distribution $2\,\delta_0$) n'est pas une fonction.

3) Cas de l'espace $\mathbb{R}^N$

- Dans le cas particulier où l'ouvert Ω est égal à $\mathbb{R}^N$, nous avons vu à la relation (2.26) que si $u(\bullet) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ est assez régulière, alors $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (ie les dérivées partielles $\partial_k u$ appartiennent à L^2) si et seulement si leurs transformées de Fourier $\mathcal{F}(\partial_k u) = i\,\xi_k\,\mathcal{F}u(\xi)$ appartiennent à L^2. Compte tenu du résultat classique de densité (sur lequel nous reviendrons)

$$\boxed{(3.26)\qquad \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \text{ est dense dans } H^1(\mathbb{R}^N).}$$

Une fonction $u \in L^2$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $\sum_k |\xi_k|^2 \, |\hat{u}(\xi)|^2$ est intégrable, ou en d'autres termes si et seulement si $(1+|\xi|^2)^{1/2} \, \hat{u}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$. S12

$$\boxed{(3.27) \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N).\ \left(u \in H^1(\mathbb{R}^N)\right) \Leftrightarrow \left((1+|\xi|^2)^{1/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\right)}$$

- Vérifions que si $|\xi| \, \hat{u}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$, la dérivée de u au sens des distributions est effectivement une fonction, i.e. $\frac{\partial}{\partial x_k} T_u = T_{\partial u/\partial x_k}$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} T_u , \varphi \right\rangle = - \left\langle T_u , \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}^N} u \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx$$

$$= - \left(u , \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_0 = - \left(\hat{u} , \mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \right)_0$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\hat{u}(\xi)} \; i \, \xi_k \; \hat{\varphi}(\xi) \, d\xi$$

$$= \left(i \, \xi_k \, \hat{u}(\bullet) , \hat{\varphi}(\bullet) \right)_0 = \left(\overline{\mathcal{F}} (i \, \xi_k \hat{u}) , \varphi \right)_0$$

et la distribution $\frac{\partial}{\partial x_k} T_u$ est représentée par la fonction $\overline{\mathcal{F}}(i \, \xi_k \hat{u})$ qui appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$.

- Le résultat (3.27) s'étend facilement à l'espace de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^N)$:

$$(3.28) \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N).\ \left(u \in H^m(\mathbb{R}^N)\right) \Leftrightarrow \left((1+|\xi|^2)^{m/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\right)$$

qui exprime sous forme plus savante la remar faite au début du chapitre 2 : plus u est régulière et plus sa transformée de Fourier décroît vite vers 0 à l'infini, même si le membre de droite de la relation (3.28) n'indique pas explicitement une vitesse de convergence.

- On remarque ensuite que pour s réel >0 (et même <0 mais nous laissons ce cas de côté ici), la condition $(1+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ prend du sens dès que $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. C'est cette condition qui permet de <u>définir</u> l'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ lorsque s est réel >0 non entier.

$$(3.29)\quad u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ s>0 . \quad \left(u \in H^s(\mathbb{R}^N)\right) \Leftrightarrow \left((1+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)\right)$$

En particulier pour $s = 1/2$, $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ appartient à $H^{1/2}(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si $|\xi|\,|\hat{u}|^2$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$\boxed{(3.30)\quad u \in L^2(\mathbb{R}^N).\ \left(u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^N)\right) \Longleftrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi < \infty\right)}$$

4) Approximation de $H^m(\Omega)$, continuité

- La transformation de Fourier nous permet d'étudier le lien entre les espaces H^m et l'espace $\mathscr{C}^0$ des fonctions continues, au moins dans le cas de $\mathbb{R}^N$. On a le résultat suivant (théorème de Sobolev) :

$$\boxed{(3.31) \quad (s > N/2) \Longrightarrow \left(H^s(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^N)\right).}$$

La preuve consiste à utiliser la définition (3.29) avec la transformée de Fourier. On écrit

$$(3.32) \qquad \hat{u}(\xi) = \left[(1+|\xi|^2)^{s/2} \, \hat{u}(\xi) \right] \left(\frac{1}{1+|\xi|^2} \right)^{s/2},$$

le premier facteur du membre de droite de la relation (3.32) appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$ si $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et le second appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$ dès que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s}$ converge, c'est à dire après passage en coordonnées polaires pour $\int_0^\infty \frac{\rho^{N-1}}{(1+\rho^2)^s} \, d\rho < \infty$ ce qui a lieu lorsque $2s-(N-1) > 1$, soit $s > N/2$. Dans ces conditions, $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et la relation (2.4) appliquée à $\overline{\mathcal{F}}$ au lieu de $\mathcal{F}$ montre que $u = \overline{\mathcal{F}} \, \hat{u}$ appartient à $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^N)$ et tend vers zéro si $|x|$ tend vers l'infini :

$$(3.33) \quad \left(s > \frac{N}{2}, \; u \in H^s(\mathbb{R}^N) \right) \Longrightarrow \left(u(x) \to 0 \text{ si } |x| \to \infty \right).$$

on peut aussi (voir par exemple JM Bony, Analyse, Cours à l'Ecole Polytechnique, 1989) montrer que dans les mêmes conditions, $H^s(\mathbb{R}^N)$ est une <u>algèbre</u> pour la multiplication des fonctions :

$$(3.34) \qquad s > N/2 . \quad u, v \in H^s(\mathbb{R}^N) \Rightarrow uv \in H^s(\mathbb{R}^N)$$

La généralisation de l'inclusion (3.31) aux dérivées d'ordre supérieur est immédiate :

$$(3.35) \qquad \left(s > \frac{N}{2} + m\right) \Rightarrow \left(H^s(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N)\right) .$$

- Dans le cas général où Ω est un ouvert (borné) de $\mathbb{R}^N$, nous nous proposons d'approcher l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par des fonctions de $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ ou $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ très régulières, jusqu'au bord $\partial\Omega$ du domaine Ω. Il faut d'abord pour cela préciser la notion d'ouvert <u>k-régulier</u>.

On suppose d'abord

$$(3.36) \qquad \Omega \text{ ouvert borné } \subset \mathbb{R}^N .$$

Dire que Ω est k-régulier signifie que $\Gamma \equiv \partial\Omega$ est une variété de classe $\mathcal{C}^k$, Ω étant localement d'un seul côté de sa frontière.

- De façon précise, il existe une collection $(\mathcal{O}_j)_{0\le j\le p}$ d'ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$ qui recouvre l'adhérence de Ω

(3.37) $$\overline{\Omega} \subset \left(\bigcup_{j=0}^{p} \mathcal{O}_j \right),$$

l'ouvert $\mathcal{O}_0$ est inclus dans Ω

(3.38) $$\mathcal{O}_0 \subset \Omega$$

alors que les ouverts $(\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p)$ définissent un système de cartes locales pour paramétrer le bord Γ :

(3.39) $$\Gamma \subset \left(\bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{O}_j \right).$$

Il existe une famille de fonctions φ_j de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{O}_j$ à valeurs dans $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$

(3.40) $$\mathcal{O}_j \ni x \mapsto y = \varphi_j(x) \in B \quad \subset \mathbb{R}^N$$

qu'on suppose inversible et φ_j^{-1} de classe $\mathcal{C}^k$ également,

(3.41) $$B \ni y \mapsto x = \varphi_j^{-1}(y) \in \mathcal{O}_j, \quad \varphi_j^{-1} \in \left(\mathcal{C}^k(B)\right)^N$$

telle que l'image de $\mathcal{O}_j \cap \Omega$ (respectivement $\mathcal{O}_j \cap \Gamma$) par φ_j soit la "demi boule supérieure" de B (respectivement les points de B dont la N^o composante est nulle) :

(3.42) $$\varphi_j(\mathcal{O}_j \cap \Omega) = \{ y \in B,\ y_N > 0 \} \qquad y \equiv (y_1, \dots, y_{N-1}, y_N)$$

(3.43) $$\varphi_j(\mathcal{O}_j \cap \Gamma) = \{ y = (y_1, \dots, y_N) \in B,\ y_N = 0 \}.$$

Il est parfois utile de poser

(3.44) $\mathbb{R}^N_+ = \{ y = (y_1, \ldots, y_{N-1}, y_N) \in \mathbb{R}^N, \ y_N > 0 \}$

- après cartographie locale, l'image par φ_j de $\Omega \cap \mathcal{O}_j$ a l'aspect donné Figure 1. Notons que les cartes locales ont des conditions de compatibilité pour assurer le caractère intrinsèque des notions [voir par exemple le cours de géométrie différentielle]

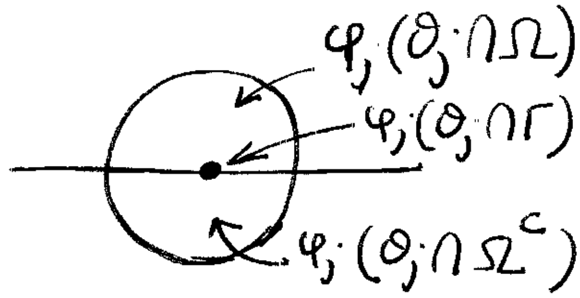

Figure 1
j^o carte de l'ouvert Ω

- Nous dirons que l'ouvert est k-régulier lorsque d'une part il est borné, et d'autre part les cartes locales φ_j et leurs inverses φ_j^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$. Lorsque Ω est k-régulier pour tout $k \in \mathbb{N}$, Ω est dit ∞-régulier. Par ailleurs, on définit l'espace $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$ des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ définies sur $\mathbb{R}^N$ et $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ comme l'intersection des $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$.
- on a le résultat de densité suivant : si Ω est k-régulier, alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$ si $m \leq k$:

$$\boxed{(3.45) \quad (\Omega \text{- k-régulier}) \Rightarrow (\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \text{ dense dans } H^m(\Omega), \ m \leq k).}$$

Si Ω est ∞-régulier, $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans tout $H^m(\Omega)$.
Rappelons la chaîne d'inclusions :

(3.46) $\quad \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{C}^m(\bar{\Omega}) \subset H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega), \quad m \geq 0.$

- Le résultat important qui lie les fonctions dérivables jusqu'à l'ordre m au sens des espaces $H^m(\Omega)$ et les fonctions continues est le théorème de Sobolev :

$$\boxed{(3.47) \quad \left(H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\right) \Leftrightarrow \left(m > N/2\right).}$$

Ce point est important. Si une fonction est m fois dérivable avec $m > N/2$ (ie appartient à $H^m(\Omega)$ avec $m > N/2$), alors elle est continue sur $\overline{\Omega}$.

- Dans le cas de la dimension 1 ($\Omega =]0,1[$ pour fixer les idées), l'espace H^1 est composé de fonctions continues (ou plus exactement ayant un représentant continu). Le point délicat est de définir la valeur ponctuelle $u(x)$ pour $u \in H^1(0,1)$ et $x \in [0,1]$. A priori, $u \in L^2(\Omega)$ donc la valeur ponctuelle $u(x)$ n'est utile que presque partout ! Le bon cadre est de penser à la masse de Dirac ; on a

(3.48) $\quad u(x) = \langle \delta_x , u \rangle$, u régulière

donc par exemple pour $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. On montre d'abord que la masse de Dirac δ_x définit une forme linéaire continue pour la topologie H^1 sur le sous espace dense $\mathcal{C}^1([0,1])$:

(3.49) $\exists C > 0, \ \forall u \in \mathcal{C}^1([0,1]), \ |\langle \delta_x, u \rangle| \leq C \, \|u\|_1$.

- La preuve de la relation (3.49) est élémentaire. Pour u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a :

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(\theta)\, d\theta$$

dont on déduit :

$$|u(x)|^2 \leq 2\left(|u(y)|^2 + \left|\int_x^y u'(\theta) d\theta\right|^2\right)$$

$$|u(x)|^2 \leq 2\left(|u(y)|^2 + \int_0^1 |u'(\theta)|^2 d\theta\right).$$

Puis on intègre l'inégalité précédente par rapport à $y \in [0,1]$. Il vient

$$|\langle \delta_x, u \rangle|^2 \leq 2\left(\|u\|_0^2 + \|u'\|_0^2\right), \ u \in \mathcal{C}^1([0,1])$$

qui exprime exactement (3.49), avec $C = \sqrt{2}$.

- On utilise ensuite la densité de $\mathcal{C}^1([0,1])$ dans $H^1(0,1)$: si $u \in H^1(0,1)$, il existe $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^1([0,1])$ de sorte que $\|u_k - u\|_1 \to 0$ si $k \to \infty$. Par suite, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^1(0,1)$ et on déduit de (2.35) que la suite numérique $(\langle \delta_x, u_k \rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Donc elle converge vers un nombre qui, <u>par définition</u>, est noté $\langle \delta_x, u \rangle$ ou $u(x)$ pour $u \in H^1(0,1)$ et $x \in [0,1]$. L'inégalité (3.49) s'étend alors naturellement à $u \in H^1(0,1)$.

- On remarque que $\langle \delta_0, u \rangle$ et $\langle \delta_1, u \rangle$, valeurs de la fonction $u \in H^1(0,1)$ au bord de $\Omega =]0,1[$ sont bien définies comme fonctions continues de u. La "trace" au bord de $u \in H^1(0,1)$ ie les valeurs

$u(0)$ et $u(1)$ dans ce cas particulier, a un sens pour $u \in H^1(0,1)$. L'établissement de la continuité de la fonction $[0,1] \ni x \mapsto u(x) \equiv \langle \delta_x, u \rangle \in \mathbb{R}$ est alors menée comme pour l'existence de $\langle \delta_x, u \rangle$. On suppose d'abord que $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$. On a alors $| u(y) - u(x) | \leq \int_x^y |u'(\theta)| d\theta$
$\leq \sqrt{|y-x|} \left(\int_0^1 |u'(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2} \leq \|u\|_1 \, |y-x|^{1/2}$. Pour (x,y) fixé dans $[0,1]^2$, cette inégalité passe à la limite pour une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^1([0,1])$ qui converge vers une fonction donnée $u \in H^1(0,1)$ (dans $H^1(0,1)$) :

$$|\langle \delta_y, u \rangle - \langle \delta_x, u \rangle| \leq \|u\|_1 \sqrt{|y-x|} \,, \quad u \in H^1(0,1)$$

inégalité qui établit la continuité (uniforme) de $u(\bullet)$ sur l'intervalle fermé $[0,1]$. $\square$

5) Trace au bord

- Nous avons vu qu'à une dimension spatiale, les valeurs au bord $\{0,1\}$ de l'ouvert $]0,1[$ de $u \in H^1(0,1)$ sont bien définies, ce sont des formes linéaires continues sur $H^1(0,1)$. Le mode de construction n'est pas élémentaire : $u \in H^1(0,1)$ reste une fonction de $L^2(0,1)$, donc définie a priori presque partout sur $]0,1[$. On doit prendre une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions régulières ($u_k \in \mathcal{C}^1([0,1])$ par exemple) qui converge vers $u \in H^1(0,1)$ pour la norme $H^1(0,1)$, i.e. $\|u_k - u\|_0 \to 0$ et $\|\frac{d}{dx}(u_k - u)\|_0 \to 0$ si $k \to \infty$.