CHAPITRE 3

Espaces de Sobolev

- Fonctions de carré intégrable
- Définition et premières propriétés
- Cas de l'espace $\mathbb{R}^N$
- Approximation de H^m, continuité
- Trace au bord
- Formule de Green
- Compacité

François Dubois, janvier 2000, édition août 2007, 39 pages.

$u(0)$ et $u(1)$ dans ce cas particulier, a un sens pour $u \in H^1(0,1)$. L'établissement de la continuité de la fonction $[0,1] \ni x \mapsto u(x) \equiv \langle \delta_x, u \rangle \in \mathbb{R}$ est alors menée comme pour l'existence de $\langle \delta_x, u \rangle$. On suppose d'abord que $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$. On a alors $| u(y) - u(x) | \leq \int_x^y |u'(\theta)| d\theta$
$\leq \sqrt{|y-x|} \left(\int_0^1 |u'(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2} \leq \|u\|_1 \, |y-x|^{1/2}$. Pour (x,y) fixé dans $[0,1]^2$, cette inégalité passe à la limite pour une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^1([0,1])$ qui converge (dans $H^1(0,1)$) vers une fonction donnée $u \in H^1(0,1)$:

$$|\langle \delta_y, u \rangle - \langle \delta_x, u \rangle| \leq \|u\|_1 \sqrt{|y-x|} \quad , u \in H^1(0,1)$$

inégalité qui établit la continuité (uniforme) de $u(\bullet)$ sur l'intervalle fermé $[0,1]$. $\square$

5) Trace au bord

- Nous avons vu qu'à une dimension spatiale, les valeurs au bord $\{0,1\}$ de l'ouvert $]0,1[$ de $u \in H^1(0,1)$ sont bien définies ; ce sont des formes linéaires continues sur $H^1(0,1)$. Le mode de construction n'est pas élémentaire : $u \in H^1(0,1)$ reste une fonction de $L^2(0,1)$, donc définie à priori presque partout sur $]0,1[$. On doit prendre une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions régulières ($u_k \in \mathcal{C}^1([0,1])$ par exemple) qui converge vers $u \in H^1(0,1)$ pour la norme $H^1(0,1)$, i.e. $\|u_k - u\|_0 \to 0$ et $\| \frac{d}{dx}(u_k - u) \|_0 \to 0$ si $k \to \infty$.

alors la suite des valeurs ponctuelles en $x=0$ ou $x=1$, ie $(\langle \delta_x, u_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre qu'on appelle $\langle \delta_x, u\rangle$ ou $u(x)$. Ce nombre ne dépend pas de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ choisie car $H^1(0,1)$ est un espace séparé.

- Dans le cas bidimensionnel, il reste hors de question de définir une "valeur au bord" ou une "trace" de la fonction $u(\bullet)$ sur le bord $\partial\Omega$ si elle appartient seulement à $L^2(\Omega)$. Par exemple, pour $\Omega = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$, la fonction

$$(3.50) \qquad u(x) = \frac{1}{(1-|x|^2)^{1/4}}, \quad x \in B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$$

appartient à $L^2(B(0,1))$ puisque l'intégrale $\int_{B(0,1)} |u|^2 dx$ est bien convergente :

$$\int_0^1 |u|^2 r\,dr = \int_0^1 \frac{1}{(1-r^2)^{1/2}} \frac{1}{2} d(r^2) = -\frac{1}{2}\Big[(1-r^2)^{1/2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Par contre pour x tendant vers le bord $\partial B(0,1)$ ie $|x|^2 \to 1$, les valeurs ponctuelles $u(x)$ tendent vers $+\infty$, ce en tout point. On peut toutefois remarquer que la norme L^2 de la dérivée de u, ie $\int_{B(0,1)} \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 r\,dr$ est infinie (l'intégrale $\int_0^1 \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{5/2} r^2 dr$ diverge en $r=1$), donc la fonction $u(\bullet)$ définie en (3.50) appartient à $L^2(0,1)$ mais pas à $H^1(0,1)$.

• Quelle est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie de $H^1(\Omega)$? Nous avons vu que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense pour la topologie de $L^2(\Omega)$; pour l'espace $H^1(\Omega)$, il y a deux cas de figure, selon que $\Omega = \mathbb{R}^N$ (pas de bord) ou que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
On a d'abord le résultat positif suivant :

(3.51) $\quad \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^N)$, $\forall m \geq 0$.

Par contre, dès que Ω a un bord non vide, on n'a pas la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^1(\Omega)$. On s'en convainc de façon intuitive en étudiant des fonctions $u_\varepsilon \in \mathcal{D}(]0,1[)$ qui convergent (dans $L^2(0,1)$) vers $u \equiv 1 \in H^1(0,1)$. Pour rejoindre la valeur 1, la fonction u_ε doit "monter rapidement" de $u(0) = 0$ à $u(\varepsilon) = 1$; donc sa pente est typiquement de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$ sur un intervalle de longueur ε. Par suite $\int_0^1 |u'_\varepsilon|^2 dx \geq \int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 dx = \frac{1}{\varepsilon}$. Cette explication (qui n'est pas une preuve, voir aussi la figure 2) motive la définition de l'espace $H^1_0(\Omega)$

$$\boxed{(3.52) \qquad H^1_0(\Omega) \equiv \mathrm{adh}_{H^1(\Omega)} \{\mathcal{D}(\Omega)\}.}$$

qui est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie associée à la norme de l'espace $H^1(\Omega)$.

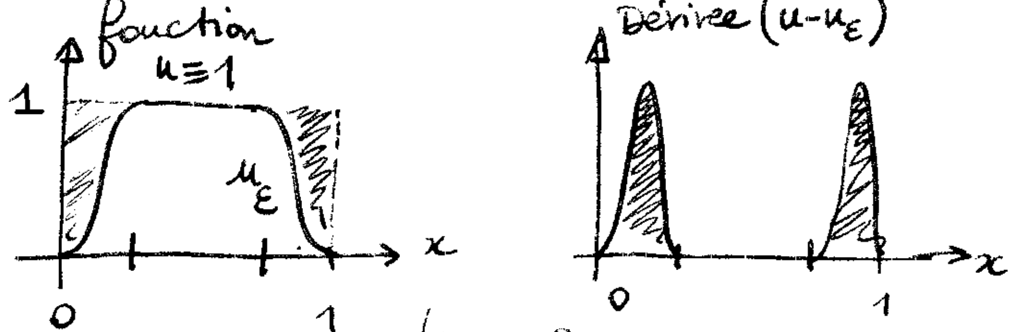


figure 2

- Pour étudier le problème qui consiste à "prendre la valeur au bord", il est naturel de commencer par le cas d'un bord plat et, pour une fonction régulière $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ regarder l'opérateur γ qui consiste à restreindre φ à l'hyperplan $\{(x', 0),\ x' \in \mathbb{R}^{N-1}\} \simeq \mathbb{R}^{N-1}$. On suppose par exemple $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et l'opérateur de trace γ est donc défini ainsi.

$$(3.51)\quad \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \ni \varphi \mapsto \gamma\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1}). \\ \qquad (\gamma\varphi)(x') = \varphi(x', 0), \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{cases}$$

On a alors deux propriétés suivantes

$$(3.52)\quad \begin{cases} \text{Si } s > 1/2, \\ \gamma \text{ se prolonge de manière unique en un opé-} \\ \text{rateur linéaire continu de } H^s(\mathbb{R}^N) \text{ dans } H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1}) \end{cases}$$

Ce prolongement, toujours noté γ est surjectif :

$$(3.53)\quad \gamma \text{ est surjectif de } H^s(\mathbb{R}^N) \text{ sur } H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1}).$$

- Le premier point (3.52) illustre et précise (au moins dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N_+$) le fait que l'opérateur de trace au bord γ_0 a un sens pour des fonctions de H^1 et définit des "valeurs au bord" qui appartiennent à $H^{1/2}$(du bord). La preuve de (3.52) consiste à montrer qu'il existe une constante $C>0$ de sorte que

$$(3.54)\quad \|\gamma\varphi\|_{H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C\,\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

puis la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^s(\mathbb{R}^N)$ $(s>0)$ montre que γ peut être étendue de manière unique par continuité puisque $H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{N-1})$ est un espace (de Hilbert) donc complet [résultat admis ici!] pour le produit scalaire

$$(3.55)\quad \begin{cases} (f,g)_s = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s\, \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi, \\ \qquad f,g \in H^s(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Or on a $\gamma\varphi(x') = \varphi(x',0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{N-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{ix'\xi'} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi_n \right\} d\xi'$

et la formule d'inversion de Fourier montre que la transformée de Fourier (dans $\mathbb{R}^{N-1}$) de $\gamma\varphi$ est la fonction $g(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi', \xi_n)\, d\xi_n$.

- Pour $s > 1/2$, la fonction $\xi_n \mapsto 1/(1+|\xi|^2+|\xi_n|^2)^s$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^N)$ et grâce au changement de variables $\xi_n = (1+|\xi'|^2)^{1/2} \lambda$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_n}{(1+|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^s} = \left(\frac{1}{1+|\xi'|^2}\right)^s (1+|\xi'|^2)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)^s}$$
$$\equiv c_s \, (1+|\xi'|^2)^{-s+1/2}.$$

on a ensuite

$$g(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) \, (1+|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^{s/2} \right\} \frac{d\xi_n}{(1+|\xi'|^2+|\xi_n|^2)^{s/2}}$$

et grâce aux hypothèses $\hat{\varphi}\,(1+|\xi|^2)^{s/2} \in H^s(\mathbb{R}^N)$ et $s > 1/2$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans la relation précédente :

$$(3.56) \quad 2\pi \, |g(\xi')|^2 \leq c_s \, (1+|\xi|^2)^{-s+1/2} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d\xi_n.$$

on multiplie l'inégalité (3.56) $\quad \xi = (\xi', \xi_n)$ par $(1+|\xi|^2)^{s-1/2}$ et on intègre sur $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$. On a alors

$$\|\gamma\varphi\|_{H^{s-1}(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \frac{1}{2\pi} c_s \, \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^N)}$$

ce qui établit l'inégalité (3.54). □

- Nous revenons au problème de la "valeur au bord" ou "trace" $\gamma_0 u : \Gamma \to \mathbb{R}$ de $u : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$. Cette notion n'a pas de sens pour $u \in L^2(\Omega)$ (voir l'exemple (3.50)) et, comme pour le cas de la dimension 1, elle en prend une si on a une estimation du type

$$\boxed{(3.57)\ \exists C>0,\ \forall u \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega}),\ \|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\, \|u\|_1 .}$$

Dans ce cas (si la relation (3.57) est vraie), on prend une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ qui converge vers $u \in H^1(\Omega)$ [lorsque Ω est 1-régulier] : $\|u_k - u\|_1 \to 0$, donc est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Compte tenu de (3.57) (appliquée à $(u_n - u_{n+p})$), la suite des traces $(\gamma_0 u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Gamma)$ est de Cauchy, donc converge dans cet espace complet vers une fonction qu'on définit comme étant égale à $\gamma_0 u \in L^2(\Gamma)$. Cette fonction ne dépend pas de la suite u_k qui converge vers u (prendre une seconde suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ qui converge vers u en norme H^1 et introduire la suite entrelacée $u_0, v_0, u_1, v_1, \dots$) et en passant à la limite dans l'inégalité $\|\gamma_0 u_k\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\, \|u_k\|_1$, l'inégalité (3.57) est vraie pour $u \in H^1(\Omega)$.

- Il reste à établir l'estimation a priori (3.57). On le propose ici (et le cas général se réduit à de la technique sur les cartes locales, les partitions de l'unité, etc...) dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N_+ = \{y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N,\ y_N > 0\}$.

auquel on se ramène avec des cartes locales φ_j introduites aux relations (3.40) à (3.43). Lorsque $u \in H^1(\mathbb{R}^N_+)$, sa trace $\gamma_0 u$ est une fonction définie sur le bord $\partial \mathbb{R}^N_+$ de $\mathbb{R}^N_+$, qui est isomorphe à $\mathbb{R}^{N-1}$:

(3.58) $\partial \mathbb{R}^N_+ = \{ y = (y', 0), \; y' \in \mathbb{R}^{N-1} \}$.

Pour $y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$ et $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ (qui est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N_+)$, cf (3.45)), on a

$$0 - |u(y',0)|^2 = \int_0^Y \left\{ \frac{\partial}{\partial x_N} [u(y',\theta)]^2 \right\} d\theta = \int_0^Y 2\, u(y',\theta) \frac{\partial u}{\partial x_N}(y',\theta)\, d\theta$$

$$|u(y',0)|^2 \leq \int_0^Y |u(y',\theta)|^2 d\theta + \int_0^Y \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(y',\theta) \right|^2 d\theta .$$

Puis on intègre l'inégalité précédente par rapport à $y' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Il vient

$$\|\gamma_0 u\|^2_{L^2(\partial \mathbb{R}^N_+)} \leq \|u\|_0^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\|_0^2 , \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+}) .$$

ce qui établit

(3.59) $$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial \mathbb{R}^N_+)} \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} , \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^N_+}) .$$

- Ce qui précède (plus des compléments techniques de géométrie différentielle qui n'apportent pas d'idée nouvelle pour le problème qui nous intéresse) montre que la trace $\gamma_0 u$ de $u \in H^1(\Omega)$ a un sens comme fonction de $L^2(\Gamma)$ et dépend continûment de u pour la topologie de $H^1(\Omega)$.

$$\boxed{(3.60) \begin{cases} \exists C > 0, \; \|\gamma_0 u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|u\|_1 , & \forall u \in H^1(\Omega) \\ \gamma_0 u(x) = u(x) , \quad \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), & \forall x \in \Gamma = \partial\Omega . \end{cases}}$$

Cette existence de la trace au bord montre qu'en général, $\mathcal{D}(\Omega)$ ne peut être dense dans $H^1(\Omega)$. En effet, si c'était le cas, on aurait $u_k \to u$ dans $H^1(\Omega)$ avec $u_k \in \mathcal{D}(\Omega)$. Mais $\gamma_0(u_k)=0$ pour $u_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ donc $\gamma_0 u = 0$ par continuité H^1, ce qui élimine les constantes, qui appartiennent à $H^1(\Omega)$ si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Compte tenu de la définition (3.52) et du point qui précède, on a

$$\boxed{(3.61) \qquad H^1_0(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega), \quad \Omega \text{ ouvert borné } \subset \mathbb{R}^N.}$$

- on a, compte tenu du raisonnement vu plus haut et la définition (3.52) de $H^1_0(\Omega)$, l'inclusion $H^1_0(\Omega) \subset \ker \gamma_0$: la trace de toute fonction de H^1_0 est identiquement nulle sur Γ. L'inclusion inverse est également vraie, résultat que nous admettons ici (voir la preuve dans Raviart-Thomas par exemple)

$$\boxed{(3.62) \qquad \ker \gamma_0 = H^1_0(\Omega). \quad \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^N.}$$

- On dispose donc de la trace au bord $\gamma_0 u$ de toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, donc d'une application linéaire continue $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ dont nous avons caractérisé le noyau en (3.62). Une question mathématiquement naturelle est de savoir si γ_0 est surjective, i.e. si toute fonction $\varphi \in L^2(\Gamma)$ peut s'écrire sous la forme $\varphi = \gamma_0 u$ pour $u \in H^1(\Omega)$. La réponse est <u>négative</u>

l'image de γ_0 est un sous-espace strictement inclus dans $L^2(\Gamma)$ qui peut se caractériser par transformation de Fourier lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. On pose donc

$$\boxed{(3.63) \qquad \operatorname{Im} \gamma_0 = H^{1/2}(\Gamma) \subsetneq L^2(\Gamma).}$$

- L'extension des résultats précédents aux espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ d'ordre entier $m \geqslant 2$ demande un certain soin. Dans le cas $m=2$ on pose

$$(3.64) \qquad H^2_0(\Omega) = \operatorname{adh}_{H^2(\Omega)} (\mathcal{D}(\Omega)) .$$

Dans le cas monodimensionnel et $\Omega =]0,1[$, le fait que la norme H^2 contrôle (en moyenne quadratique) les deux premières dérivées et que $u \in H^2(0,1)$ implique $\frac{\partial u}{\partial x} \in H^1(0,1)$ montre que non seulement les valeurs $u(0)$ et $u(1)$ de la fonction au bord "n'ont pas le temps de décoller" mais qu'il en est de même pour les dérivées aussi premières $\frac{\partial u}{\partial x}(0)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(1)$.

- Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, la caractérisation (3.64) et la condition

$$(3.65) \qquad H^2(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega), \ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in H^1(\Omega), \ j=1,\dots,N \}$$

montrent que si $u \in H^2_0$, $\gamma_0 u$ est nulle ainsi que $\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$, i.e. $\gamma_0(\nabla u)$. En séparant gradient tangentiel et gradient normal

$$(3.66) \qquad \frac{\partial u}{\partial n} \equiv \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j , \quad n_j \text{ normale extérieure à } \partial\Omega$$

on a la caractérisation de $H_0^2(\Omega)$ qui suit :

$$(3.67) \qquad H_0^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega),\ \gamma_0 u = 0,\ \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0 \right\} .$$

- Par analogie entre (3.62) et (3.67), on se convainc facilement que la bonne notion de trace sur $H^2(\Omega)$ est l'application γ_1 qui à $u \in H^2(\Omega)$, associe le <u>couple</u> $\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) \in L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. On retient que la trace au bord d'une fonction deux fois dérivable est constituée des valeurs de la fonction $u(\bullet)$ <u>et</u> des valeurs limites des dérivées normales $\frac{\partial u}{\partial n}(\bullet)$. On dispose donc d'une application γ_1 :

$$(3.68) \quad \gamma_1 : H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \quad ; \quad \gamma_1 u = \qquad \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) .$$

Le noyau de (γ_0, γ_1) est constitué de $H_0^2(\Omega)$, fonctions de H^2 nulles au bord et dont le gradient est nul au bord

$$(3.69) \qquad \ker(\gamma_0, \gamma_1) = H_0^2(\Omega) .$$

L'image de γ_1 est bien entendu distincte de $L^2(\Gamma)^2$. Elle est constituée de $\qquad H^{3/2}(\Gamma)$

$$(3.70) \qquad \mathrm{Im}\,\gamma_1 = H^{3/2}(\Gamma)$$

où $H^{1/2}(\Gamma)$ a été introduit en (3.30) et (3.63) ; $H^{3/2}(\Gamma)$ est inclus <u>strictement</u> dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

5) Formules de Green

- Il s'agit de généraliser la formule d'intégration d'une dérivée :

(3.71) $$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

qui, lorsqu'on remplace f par le produit fg, est plus connue comme "formule d'intégration par parties" (ce que l'on fait lorsqu'on ne sait pas quoi faire) :

(3.72) $$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt + \left[fg\right]_a^b .$$

- Dans le cas d'un ouvert borné Ω de frontière Γ "assez régulière" l'intégrale sur Ω de la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ (pour $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$) est une intégrale de bord :

(3.73) $$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n_j \,d\sigma(x), \quad \Omega \text{ 1-régulier}, \; u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$$

qui fait intervenir la normale unitaire extérieure $n = (n_1, \ldots, n_N)$ au domaine Ω au point $x \in \partial\Omega$.
On écrit plus souvent la relation fondamentale (3.73) (qui redonne exactement (3.71) pour $\Omega =]a,b[$) pour u remplacé par ~~la~~ le produit uv de deux fonctions : c'est la formule de Green.

(3.74) $$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\, v\,dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, n_j(x)\,d\sigma(x) \\ u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \; \Omega \text{ ouvert 1-régulier} \subset \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

- Si on fait la somme des composantes de la relation (3.73) avec $u(x)$ champ de vecteurs sur $\overline{\Omega}$, il vient

$$(3.75) \quad \int_\Omega \mathrm{div}\, u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cdot n \, d\gamma \,, \quad \Omega \text{ 1-régulier}, \; u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})^N .$$

Si u est toujours un champ de vecteurs et $v \equiv \varphi$ un champ scalaire sur Ω, la sommation sur j des relations (3.74) s'écrit

$$(3.76) \left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega u \cdot \nabla\varphi \, dx = -\int_\Omega (\mathrm{div}\, u)\, \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} (u \cdot n)\, \varphi \, d\gamma \\ \qquad u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})^N, \; \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) . \end{array} \right.$$

Si on suppose maintenant $u_j = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_j}$, la relation (3.76) entraîne immédiatement

$$(3.77) \left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega (\Delta\psi)\, \varphi \, dx = -\int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \dfrac{\partial \psi}{\partial n}\, \varphi \, d\gamma \\ \qquad \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \; \psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) . \end{array} \right.$$

- L'extension des relations précédentes aux espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$ est facile. La "recette de cuisine" qu'on peut donner ici est la suivante : si les intégrales de volume ont un sens compte tenu de la forte présence de $L^2(\Omega)$ dans la définition des espaces de Sobolev, alors la formule de Green prend un sens en ayant soin de considérer les intégrales de bord au sens des traces. On a ainsi :

(3.78) $\quad \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx = \int_\Gamma (\gamma_0 u)\, n_j\, d\gamma$, Ω 1-régulier, $u \in H^1(\Omega)$

$$\boxed{(3.79) \quad \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\, v\, dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\, n_j\, d\gamma \; ; \; u, v \in H^1(\Omega)}$$

$$\int_\Omega \operatorname{div} u\, dx = \int_\Gamma (\gamma_0 u)\cdot n\, d\gamma, \quad u \in H^1(\Omega)^N$$

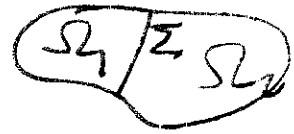
$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\operatorname{div} u)\varphi\, dx = -\int_\Omega u\cdot\nabla\varphi\, dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u\cdot n)(\gamma_0\varphi)\, d\gamma \\ \qquad u \in H^1(\Omega)^N, \; \varphi \in H^1(\Omega), \; \Omega \text{ 1-régulier} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\Delta\psi)\varphi\, dx = -\int_\Omega \nabla\psi\cdot\nabla\varphi + \int_\Gamma \gamma_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)(\gamma_0\varphi)\, d\gamma \\ \qquad \psi \in H^2(\Omega), \; \varphi \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

et ainsi de suite ...

- On termine ce chapitre par un exercice d'application. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière régulière Γ et décomposé en deux "sous domaines" Ω_1 et Ω_2 d'interface (régulière) Σ [figure 3]

(3.80) $\quad \Omega = \Omega_1 \cup \Sigma \cup \Omega_2$



(3.81) $\quad \Sigma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$

Figure 3

On se demande à quelle condition une fonction $u \in L^2$ de restriction u_i à Ω_i, i.e. :

(3.82) $\quad u \in L^2, \; u_i = u|_{\Omega_i} \quad i = 1, 2$

appartient à $H^1(\Omega)$.

- Si u appartient à $H^1(\Omega)$, ses restrictions u_i appartiennent à $H^1(\Omega_i)$ et le problème se concentre sur l'interface Σ. On a donc, quitte à prolonger u_1 par 0 sur Ω_2 (et u_2 par 0 sur Ω_1) :

$$(3.83) \qquad u = u_1 \chi_{\Omega_1} + u_2 \chi_{\Omega_2} .$$

On peut calculer la dérivée de $\partial u / \partial x_j$ au sens des distributions. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; on a :

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = - \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx =$$

$$= - \int_{\Omega_1} u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx - \int_{\Omega_2} u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx$$

$$= \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \varphi \, dx - \int_\Sigma \gamma_0 u_1 \varphi \, n_j \, d\sigma + \int_\Omega \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \varphi \, dx + \int_\Sigma \gamma_0 u_2 \varphi \, n_j \, d\sigma$$

en orientant la normale à Σ de Ω_1 vers Ω_2, compte tenu de (3.79). On a donc

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = \int_{\Omega_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \varphi \, dx + \int_{\Omega_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \varphi \, dx + \int_\Sigma (\gamma_0 u_2 - \gamma_0 u_1) \varphi \, n_j \, d\sigma .$$

c'est à dire

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \chi_{\Omega_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \chi_{\Omega_2} + [u]_\Sigma \, \delta_\Sigma \, n_j$$

où le saut de u à travers l'interface Σ est défini par

$$[u]_\Sigma = \gamma_0 u_2 - \gamma_0 u_1 .$$

Si l'on admet que la distribution δ_Σ n'est pas une fonction, le fait que la distribution $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ soit une fonction impose $[u] = 0$. On a donc à prouver la proposition suivante :

(3.84) $\left(u \in H^1(\Omega)\right) \Leftrightarrow \left(u_i \in H^1(\Omega_i),\ \gamma_0 u_1 = \gamma_0 u_2 \text{ sur } \Sigma\right)$, u donné par (3.83).

- Si u, donnée par (3.83), appartient à $H^1(\Omega)$, alors $\exists\, u_k \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, u_k converge vers u dans $H^1(\Omega)$. Par suite $v_i^k \equiv u_k|_{\Omega_i}$ converge vers u_i dans $H^1(\Omega_i)$ et on a bien entendu $\gamma_0 v_1^k = \gamma_0 v_2^k$, où le membre de gauche est une trace relativement au bord de Ω_1 et celui de droite une trace relative au bord de Ω_2, là où l'égalité peut être possible, ie sur $\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Comme la trace est un opérateur continu $\gamma_0 v_i^k$ converge vers $\gamma_0 u_i$ dans $L^2(\Sigma)$ (cf (2.42)), on déduit par unicité de la limite $\gamma_0 u_1 = \gamma_0 u_2$ ce qui établit le terme de droite de l'équivalence (3.8). Réciproquement, si $u_i \in H^1(\Omega_i)$ et $[u] = 0$ sur Σ, alors le calcul (2.69) montre que $\frac{\partial u}{\partial x}$ est la fonction égale à $\frac{\partial u_1}{\partial x_i}$ sur Ω_1 et à $\frac{\partial u_2}{\partial x_i}$ sur Ω_2. Comme ces deux fonctions sont de carré intégrable sur Ω_1 et Ω_2 respectivement, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est de carré intégrable sur Ω et la propriété est établie. $\square$

7) Compacité.

- Un résultat important pour les applications concerne l'étude de l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Lorsque Ω est borné et 1-régulier, le théorème de Rellich montre que cette injection est compacte

$$\boxed{(3.85) \quad \left(H^1(\Omega) \ni u \mapsto u \in L^2(\Omega)\right) \text{ est compacte}, \quad \Omega \text{ borné}, \ \Omega \text{ 1-régulier}}$$

c'est à dire que toute partie bornée de $H^1(\Omega)$ est relativement compacte dans $L^2(\Omega)$. En pratique, ceci signifie que si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$ est borné, ie $\exists C > 0$, $\|u_k\|_1 \leq C$, alors on peut en extraire une sous suite (encore notée u_k) de sorte que u_k converge dans $L^2(\Omega)$.

$$\boxed{(3.86) \quad \left(\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \|u_k\| \leq C\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \exists u_k \text{ extraite}, \exists u \in L^2(\Omega) \\ u_k \to u \text{ dans } L^2(\Omega) \end{pmatrix}}$$

- La preuve de la relation (3.86) utilise de façon essentielle la propriété de compacité faible de la boule unité dans un espace de Hilbert [si H est un espace de Hilbert et u_k une suite bornée de H, il existe une suite extraite u_k qui converge faiblement dans H : $(u_k, \varphi)_H \to (u, \varphi)_H$, $\forall \varphi \in H$]. Si l'ouvert Ω est 1-régulier, il existe un opérateur linéaire $\underbrace{}_{\text{continu}}$ P de prolongement de $H^1(\Omega)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$:

(3.87) $\begin{cases} H^1(\Omega) \ni u \mapsto \tilde{u} = Pu \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ \exists c > 0, \quad \|Pu\|_{1,\mathbb{R}^N} \leq C \, \|u\|_{1,\Omega}, \end{cases}$ Ω-1-régulier

tel que

(3.88) $\quad (Pu)(x) = u(x) \quad pp(x) \in \Omega.$

On peut de plus se ramener au cas où Pu a son support dans un compact K fixé, borné de $\mathbb{R}^N$:

(3.89) $\quad Pu(x) = 0 \quad si \quad |x| \geq \tilde{M}. \quad , u \in H^1(\Omega)$

- La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(\Omega)$, donc il en est de même de $v_k = Pu_k$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. On peut donc en extraire une sous suite <u>faiblement</u> convergente dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ [v_k est également bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ si elle l'est dans $H^1(\mathbb{R}^N)$], qu'on note encore $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Quitte à changer v_k en $v_k - v$, on peut supposer que $v_k \to 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ faiblement :

$$(v_k, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0 \qquad \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Compte tenu de l'isométrie de la transformée de Fourier, on a :

$$\|v_k\|^2_{0,\mathbb{R}^N} = \|\hat{v}_k\|^2_{0,\mathbb{R}^N} \qquad \text{donc}$$

(3.90) $$\|v_k\|_0^2 \leq \int_{|\xi|\leq M} |\hat{v}_k|^2 d\xi + \frac{1}{1+M^2} \int_{|\xi|\geq M} (1+|\xi|^2)|\hat{v}_k(\xi)|^2 d\xi$$

Montrons que v_k converge <u>fortement</u> dans $L^2(\mathbb{R}^N)$; il suffit de montrer que le membre de droite de (3.90) tend vers 0. Comme $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H^1, il en est de même de $(Pv_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (cf (3.83)) et de $\left((1+|\xi|^2)^{1/2}\,\widehat{v_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ compte tenu de (3.29). On a donc

$$\int_{|\xi|\leq M}(1+|\xi|^2)\,|\widehat{v_k}(\xi)|^2\,d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^N}(1+|\xi|^2)\,|\widehat{v_k}(\xi)|^2\,d\xi \leq \text{Cte}\,.$$

- Un nombre réel $\varepsilon>0$ arbitraire étant donné, on peut toujours trouver $M>0$ de sorte que

$$\frac{1}{1+M^2}\int_{|\xi|\geq M}(1+|\xi|^2)\,|\widehat{v_k}(\xi)|^2\,d\xi \leq \frac{\text{Cte}}{1+M^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Comme par ailleurs le support de v_k appartient à un compact fixé K, $v_k\in L^1(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$\widehat{v_k}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\xi}\,v_k(x)\,dx$$

$$\widehat{v_k}(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}\int_{|x|\leq \tilde{M}} e^{-ix\xi}\,v_k(x)\,dx\,.$$

Pour tout $\xi\in\mathbb{R}^N$, la fonction $x\mapsto e^{-ix\xi}$ appartient à $L^2(B(0,\tilde{M}))$ donc est une fonction test particulière de $L^2(\mathbb{R}^N)$ si on la prolonge par 0. Comme $v_k\to 0$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{v_k}(\xi)\to 0$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}^N$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet alors de majorer le premier terme du membre de droite de (3.90) puisque la suite $\widehat{v_k}(\xi)$ est bornée dans $L^2(B(0,M))$ car $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ l'est dans H^1. L'intégrale $\int_{|\xi|\leq M} |\widehat{v_k}(\xi)|^2 \, d\xi$ tend vers zéro si $k \to \infty$, donc elle est $\leq \varepsilon/2$ si k est assez grand. $\blacksquare$

- Dans le cas où Ω n'est pas borné, la situation est moins simple. Dans le cas particulier où $\Omega = \mathbb{R}^N$, l'injection $H^1(\mathbb{R}^N) \ni u \mapsto u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ n'est pas compacte

$$\boxed{(3.91) \quad \left(H^1(\mathbb{R}^N) \ni u \mapsto u \in L^2(\mathbb{R}^N)\right) \text{ n'est pas compacte.}}$$

On peut s'en convaincre en prenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ fixée non nulle à support dans $B(0,1/2)$ et fabriquer la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

(3.92) $\quad u_k(x) = \varphi(x-k) \quad , k \in \mathbb{N}, \; x \in \mathbb{R}^N.$

La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans tous les $H^m(\mathbb{R}^N)$; $\|u_k\|_1 = \|\varphi\|_1$ en particulier et cependant elle ne converge pas dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Elle converge au sens des distributions vers 0, donc la seule limite possible dans L^2 est $u=0$. Comme on a $\|u_k\|_0 \equiv \|\varphi\|_0 \neq 0$, on ne peut avoir $u_k \to 0$ fortement dans L^2, ce qui montre la propriété. $\blacksquare$