Chapitre 4

Fourier discret

- Introduction
- Coefficients de Fourier et séries de Fourier
- Théorie hilbertienne
- Opérateurs linéairement équivalents

François Dubois, janvier 2000, édition août 2007, 15 pages.

IV Fourier discret

1) Introduction

- Nous avons vu au chapitre II que la trans-formation de Fourier est une isométrie $L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$. L'addition dans $\mathbb{R}^N$ joue un rôle déterminant et de façon précise le fait que $(\mathbb{R}^N, +)$ est un groupe abélien. Pour généraliser les résultats vus plus haut à d'autres fonctions (par exemple les fonctions périodiques de période 2π, ie les fonctions sur le groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), nous rappelons rapidement quelques mots sur la théorie générale. Le lecteur intéressé uniquement par les applications peut sauter ce paragraphe sans difficulté.

- L'outil de la généralisation de la trans-formation à un groupe abélien localement compact G quelconque est la notion de

<u>caractère</u>. Un caractère γ est un homomorphisme continu de G dans le groupe multiplicatif S^1 des nombres complexes de module égal à 1 :

(4.1) $G \ni g \mapsto \gamma(g) \in S^1 \equiv \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

(4.2) $\gamma(g+g') = \gamma(g)\,\gamma(g')$, $g, g' \in G$.

- on a $G = (\mathbb{R}^N, +)$ dans le cas de la transformation de Fourier et $\gamma(x) = \exp(-ix\xi)$ est paramétré par $\xi \in \mathbb{R}^N$. Le <u>groupe dual</u> $\widehat{G}$ est le groupe des caractères, i.e. des homomorphismes continus de G dans S^1 ; on observe que $\widehat{G} \simeq (\mathbb{R}^N, +)$ si $G = (\mathbb{R}^N, +)$.
- De plus, la théorie générale des groupes localement compacts montre qu'il existe une unique (à un facteur multiplicatif près) mesure dg invariante par translation, i.e. par le changement de variable $G \ni g \mapsto g + a \in G$

pour $a \in G$ fixé [on note $+$ la loi de composition du groupe abélien G].

- Par définition, la transformée de Fourier de $f \in L^1(dg)$ est une fonction $\widehat{f}$ définie sur le groupe dual $\widehat{G}$ des caractères :

$$(4.3) \qquad \widehat{G} \ni \gamma \longmapsto \widehat{f}(\gamma) = \int_G \gamma(g)\, f(g)\, d\gamma \in \mathbb{C}$$

- On a vu que le groupe dual de $G = (\mathbb{R}^N, +)$ s'identifie encore à $\mathbb{R}^N$ via l'application $\mathbb{R}^N \ni \xi \longmapsto \exp[i(\bullet, \xi)] \in \widehat{G}$ qui définit un caractère sur $\mathbb{R}^N$ paramétré par ξ.

Mais on peut utiliser d'autres groupes abéliens. Un exemple classique consiste à utiliser les nombres réels modulo 2π

$$(4.4) \qquad G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\,.$$

Il faut dans un premier temps "calculer" le groupe dual $\widehat{G}$. Pour $\theta \in G$ [θ est donc défini à 2π près], on cherche un caractère $\gamma(\theta)$ qui prend ses valeurs dans le cercle S^1 des complexes de module égal à 1, donc sous la forme $\gamma(\theta) = \exp(-i\xi\theta)$. Mais pour que cette expression ait un sens avec $\theta \in G$, il faut que le résultat soit indépendant du choix du représentant de θ, ie qu'on ait aussi $\gamma(\theta) = \exp[-i\xi(\theta+2\pi)]$. Par suite, on a nécessairement $\exp(-2i\pi\xi) = 1$, donc $\xi \in \mathbb{Z}$

$$(4.5) \qquad \widehat{G} = \mathbb{Z} \quad \text{si } G = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

- On choisit pour mesure invariante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx$ sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (où dx est la mesure de Lebesgue). Une fonction $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ est aussi une fonction périodique $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 2π :

$$(4.6) \qquad \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}, \quad f(x+2k\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Dire que $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ signifie

$$(4.7) \qquad \int_0^{2\pi} |f(x)| \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} < \infty \iff f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

- La transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ est donc une fonction $\widehat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ qui, au caractère $\gamma_k : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

(4.8) $\gamma_k(\theta) = e^{-ik\theta}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

associe le nombre $(Ff)(k) = \hat{f}(k)$ grâce à (4.3), c'est à dire ici

$$\boxed{(4.9) \quad \hat{f}(k) = \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi}}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \; k \in \mathbb{Z}}$$

- on peut aussi, échangeant les rôles de G et $\hat{G}$ dans les relations (4.4) et (4.5), voir qu'un caractère sur $\mathbb{Z}$ est de la forme $\mathbb{Z} \ni k \mapsto (e^{i\theta})^k \in S^1$ et qu'il est bien défini pour $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On munit $\mathbb{Z}$ de la mesure de comptage divisée par $\sqrt{2\pi}$ et $\ell^1(\mathbb{Z})$ est l'espace vectoriel des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de série associée absolument convergente :

$$(4.10) \quad u \in \ell^1(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{Z} \ni k \mapsto u_k \in \mathbb{C} \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |u_k| < \infty \end{cases}$$

La transformée de Fourier (inverse) $\tilde{F}u$ de $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ est la série de Fourier de coefficient u_k, c'est à dire une fonction périodique de période 2π définie par

$$\boxed{(4.11) \quad \tilde{F}u(x) = \tilde{u}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k e^{ikx}, \quad u \in \ell^1(\mathbb{Z}), \; x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}$$

2) Coefficients de Fourier et séries de Fourier.

- Le paragraphe précédent montre que nous disposons de deux transformées de Fourier. L'une est défini sur $L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ par la relation (4.9)

$$(4.12) \quad L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \ni f \mapsto \mathcal{F}f = \hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$$

puisqu'il est clair que lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, les coefficients de Fourier $\hat{f}(k)$ $(k \in \mathbb{Z})$ sont bornés :

$$(4.13) \quad \|\hat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} .$$

L'autre est défini sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ par la relation (4.11) et associe à $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sa série de Fourier :

$$(4.14) \quad \ell^1(\mathbb{Z}) \ni u \mapsto \tilde{\mathcal{F}}u = \tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) .$$

- Le résultat général (2.4) se traduit maintenant des deux façons suivantes sur $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$. On a d'une part le théorème de Riemann-Lebesgue sur la décroissance des coefficients de Fourier

$$\boxed{(4.15) \quad \hat{f}(k) \to 0 \text{ si } |k| \to \infty , \quad f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$$

et d'autre part la continuité de la série de Fourier lorsqu'on somme une série absolument convergente

$$\boxed{(4.16) \left(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni \theta \mapsto \tilde{u}(\theta) \in \mathbb{C}\right) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \quad u \in \ell^1(\mathbb{Z})}.$$

- La formule d'inversion de Fourier est facile à établir si on suppose à la fois $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\widetilde{u} = \widetilde{\mathcal{F}} u \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Ainsi que le suggère lui-même Fourier dans sa Théorie Analytique de la Chaleur (1822) [dans note en pied de page !], on multiplie la relation (4.11) par $\exp(-inx)$ et on intègre de 0 à 2π. La série du membre de droite est absolument convergente si $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ donc on échange les symboles $\int$ et Σ et on trouve finalement $\sqrt{2\pi}\; u_n$. Par ailleurs $\widetilde{u}(\bullet)$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ et il vient

$$(4.17)\quad \left\{ \begin{array}{l} u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{2\pi} \widetilde{u}(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta \,, \quad n \in \mathbb{Z} \,, \\ \qquad\qquad u \in \ell^1(\mathbb{Z}) \,, \; \widetilde{u} \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

relation qui est l'analogue "discret" de la relation (2.10) et peut s'écrire aussi

(4.18) $\quad u = \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{F}}u), \quad u \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad \widetilde{\mathcal{F}}u \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

• Le théorème d'inversion de Fourier exprime aussi que "toute fonction périodique est somme de sa série de Fourier". De façon précise, si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ (f périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$ et continue) et $\hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (les coefficients de Fourier forment une série convergente), alors

$$\boxed{(4.19) \quad f = \widetilde{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f), \quad f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \ \hat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z}).}$$

Le théorème de Stone-Weierstrass [si K est un compact de $\mathbb{R}^N$, F un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(K)$ qui (i) forme une algèbre ($f, g \in F \Rightarrow fg \in F$) (ii) est stable par conjugaison complexe ($f \in F \Rightarrow \bar{f} \in F$) et (iii) sépare les points (pour $x \neq y$ dans K, il existe f dans F tel que $f(x) \neq f(y)$), alors F est un sous-espace dense de $\mathcal{C}^0(K)$] assure d'abord que les polynômes trigonométriques (les sommes finies de la forme $\sum_{|k| \leq p} \frac{\alpha_k}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$) forment une famille dense de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, donc la fonction $g = f - \widetilde{\hat{f}}$ (qui est continue car f l'est et $\hat{f} \in \ell^1$ donc $\widetilde{\hat{f}}$ l'est aussi en vertu de (3.60)) dont tous les coefficients de Fourier sont nuls ($\hat{g} \equiv 0$) est limite uniforme

de polynomes trigonométriques P_k $(k \in \mathbb{N})$.
Par suite, $\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} g(x)\, P_k(x)\, dx$ qui est nul pour tout k. Donc g est nulle, ce qui montre le résultat. $\square$

3) Théorie hilbertienne

- La preuve précédente rappelle clairement que le "bon" cadre pour l'étude des séries de Fourier est le cadre $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ v.s. $\ell^2(\mathbb{Z})$.
Ceci est d'autant plus naturel que, compte tenu de l'inégalité de Cauchy Schwarz, on a $\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx \leqslant \sqrt{2\pi}\, \|f\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$ donc

$$(4.20) \qquad L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \subset L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

- Pour $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, les coefficients de Fourier $\hat{f}(k)$ restent définis par la relation (4.9) et l'application $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \ni f \mapsto \mathcal{F}f \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ est en fait à valeurs dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Elle réalise même une isométrie de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$, ainsi que l'exprime l'égalité de <u>Bessel-Parseval-Plancherel</u>:

$$\boxed{(4.21) \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$$

• La preuve de la relation (4.21) résulte d'une part du fait que le polynome trigonométrique

(4.22) $\quad [P_N(f)](x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k| \leq N} \hat{f}(k)\, e^{ikx}, \quad N \in \mathbb{N}, \; x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

est la projection dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ du "vecteur" f sur le sous-espace H_N engendré par les exponentielles $x \mapsto e^{ikx}$ pour $|k| \leq N$:

$$\left(f - P_N(f), e^{ikx}\right) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k) \left(e^{ikx}, e^{ikx}\right) = 0$$

et d'autre part de la propriété (classique) que l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ des fonctions continues est dense dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé de manière arbitraire, il existe $N \in \mathbb{N}$ et un polynome $p \in H_N$ de sorte que si $n \geq N$,

$$\|f - P_n(f)\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} \leq \|f - P_N(f)\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} \leq \|f - p\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} < \varepsilon .$$

La suite $(P_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers f dans l'espace $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, donc la suite des normes $\|P_n(f)\|_{L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})} = \Big\{ \sum_{|k| \leq n} |\hat{f}(k)|^2 \Big\}^{1/2}$ vers la norme de f dans L^2, ce qui exprime la relation (4.21). $\blacksquare$

- Nous venons en fait de montrer que pour $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$, la série de Fourier $\tilde{u}(x)$ définie en (4.11) a un sens dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$:

$$\boxed{(4.23) \qquad \ell^2(\mathbb{Z}) \ni u \longmapsto \tilde{\mathcal{F}} u = \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$$

et la relation (4.21) [égalité de Bessel Parseval] montre que la transformation $\tilde{\mathcal{F}}$ est une isométrie entre espaces de Hilbert.

- Les autres propriétés des séries de Fourier s'établissent alors facilement. Si T_m est l'opérateur de translation d'indice m ($m \in \mathbb{Z}$) :

$$\boxed{(4.24) \begin{cases} \ell^2(\mathbb{Z}) \ni u \longmapsto T_m u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \qquad (T_m u)_k = u_{k-m} \,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

alors

$$\boxed{(4.25) \quad \tilde{\mathcal{F}}[T_m u](x) = e^{imx} (\tilde{\mathcal{F}} u)(x) \,, \; x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \,, u \in \ell^2(\mathbb{Z})}$$

et la transformation de Fourier <u>diagonalise</u> cet opérateur : l'opérateur $\widehat{T}_m \equiv \tilde{\mathcal{F}}\, T_m (\tilde{\mathcal{F}})^{-1}$ est diagonal dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$: $\widehat{T}_m \varphi(x) = (e^{ix})^m \varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\varphi \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Pour la dérivation de la transformée de Fourier, si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |u_k|^2 < \infty$, alors $\tilde{u}(x)$ appartient à $H^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$: $\frac{d\tilde{u}}{dx}$ a un sens dans $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ et est presque partout donnée par la somme $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} i k u_k e^{ikx}$

$$(4.26)\begin{cases} \dfrac{d\tilde{u}}{dx} \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}),\ \dfrac{d\tilde{u}}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} i k u_k e^{ikx} \\ \quad \text{si } u \in \ell^2(\mathbb{Z}) \text{ et } (\mathbb{Z} \ni k \mapsto k u_k \in \mathbb{C}) \in \ell^2(\mathbb{Z}). \end{cases}$$

C'est l'analogue discret de la relation (2.14).

4) opérateurs unitairement équivalents.

- Nous terminons (presque !) ce chapitre par une utilisation importante en pratique. Soit T un opérateur linéaire continu de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$(4.27)\quad T : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$$

de sorte que l'opérateur $\widehat{T}$ défini de $L^2(\mathbb{R}^N)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} L^2(\mathbb{R}^N) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "F"'] & L^2(\mathbb{R}^N) \arrow[d, "F"] \\ L^2(\mathbb{R}^N) \arrow[r, "\widehat{T}"] & L^2(\mathbb{R}^N) \end{tikzcd}$$

ie

(4.28) $\quad \hat{T}\varphi = F\,T\,\bar{F}\varphi, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$

soit diagonal :

(4.29) $\quad (\hat{T}\varphi)(\xi) = A(\xi)\,\varphi(\xi), \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N),\ \xi \in \mathbb{R}^N.$

En d'autres termes, $Tu(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{Tu}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$ (formellement!) ie

$$(Tu)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{T}\hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} A(\xi)\hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

(4.30) $\quad \widehat{Tu}(\xi) = A(\xi)\,\hat{u}(\xi), \quad u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ \xi \in \mathbb{R}^N.$

on dit alors que T est un opérateur pseudo-différentiel; le cas où T est différentiel revient à prendre pour $A(\xi)$ un polynome en ξ.

- on a alors la propriété suivante, importante en pratique:

(4.31) $\quad \|T\|_{L^2(\mathbb{R}^N), L^2(\mathbb{R}^N)} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |A(\xi)|$

on note que l'inégalité "$\leq$" est facile: pour $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\|Tu\|_0^2 = \|\widehat{Tu}\|_0^2 = \|A(\xi)\hat{u}\|_0^2 \leq \left(\sup_{\mathbb{R}} |A(\cdot)|\right)^2 \|\hat{u}\|_0^2$$

et $\|\mathring{T}\| \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |A(\xi)|$.

L'inégalité "$\geq$" impose de regarder précisément $\hat{\varphi}$ là où $|A(\xi)|$ est extremal.

- La version du résultat précédent dans le cadre discret des suites de série associée de carré convergente ($u \in \ell^2\mathbb{Z}$)) mérite l'attention.

On a

(4.32) $T : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$

et l'opérateur $\hat{T}$ rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{T} & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \tilde{F} \downarrow & & \downarrow \tilde{F} \\ L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\hat{T}} & L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \end{array}$$

ie

$$(\widehat{T}\,\tilde{u})(x) = (\widetilde{Tu})(x), \quad u \in \ell^2(\mathbb{Z}),\ x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

$$\boxed{(4.33)\quad \hat{T} \equiv \tilde{\mathcal{F}}\, T\, \mathcal{F}^{-1}.}$$

Lorsque cet opérateur est diagonal, ie

$$\boxed{(4.34)\quad (\hat{T}f)(x) = A(x)\, f(x) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})}$$

on a :

(4.35) $$\boxed{\|T\|_{\ell^2(\mathbb{Z}),\,\ell^2(\mathbb{Z})} = \sup_{\xi \in [0, 2\pi]} |A(\xi)|.}$$

- Un exemple important en pratique est celui du "laplacien discret" δ :

(4.36) $$(\delta u)_j = \frac{1}{h^2}\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right), \ u \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

On a aussi $\delta = \frac{1}{h^2}\left(T_1 - 2I_d + T_{-1}\right)$. Compte tenu de (4.25) et (4.33), il vient $\widehat{\delta} = \frac{1}{h^2}\left(e^{ix} - 2 + e^{-ix}\right)$; c'est un opérateur diagonal unitairement équivalent à δ, donc

(4.37) $$\|\delta\|_{\ell^2(\mathbb{Z}),\ell^2(\mathbb{Z})} = \frac{4}{h^2} \sup_{x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{4}{h^2}.$$

puisque $e^{ix} - 2 + e^{-ix} = -2(1-\cos x) = -4\sin^2\frac{x}{2}$. La norme du laplacien discret vaut $4/h^2$.