le cnam

Algèbre de Boole, probabilités et arithmétique

Cours 9 Probabilités discrètes

• Jeux de hasard

Dans une lettre à Pierre de Fermat en 1654, Blaise Pascal (1623-1662) résout le problème de répartir équitablement le gain d'une partie de dés en trois manches si les protagonistes n'ont pas le temps de jouer la troisième partie. Son raisonnement est fondé sur une hypothèse simple : "le hasard est égal". Cette lettre fonde le calcul des probabilités.

Le jeu de pile ou face consiste à lancer une pièce de monnaie et à parier qu'elle retombe sur "pile" ou sur "face". On joue N parties et on compte le nombre $N(F)$ de fois où la pièce retombe sur "face" pour fixer les idées. Le quotient $\frac{N(F)}{N}$ est la fréquence empirique de succès. Si le nombre de parties N croît vers l'infini, la fréquence empirique $\frac{N(F)}{N}$ converge vers un nombre $\mathrm{P}(F)$, probabilité que la pièce retombe sur "face". Cette probabilité, limite d'un quotient de deux entiers positifs où le dénominateur est supérieur au numérateur, est par nature compris entre 0 et 1 : $0 \leq \mathrm{P}(F) \leq 1$.

• Expériences numériques

Nous avons effectué des simulations numériques de l'expérience suggérée plus haut, avec $N = 100$, $N = 1000$ et $N = 10000$ ainsi qu'illustré sur les figures 1 à 3 ci-dessous.

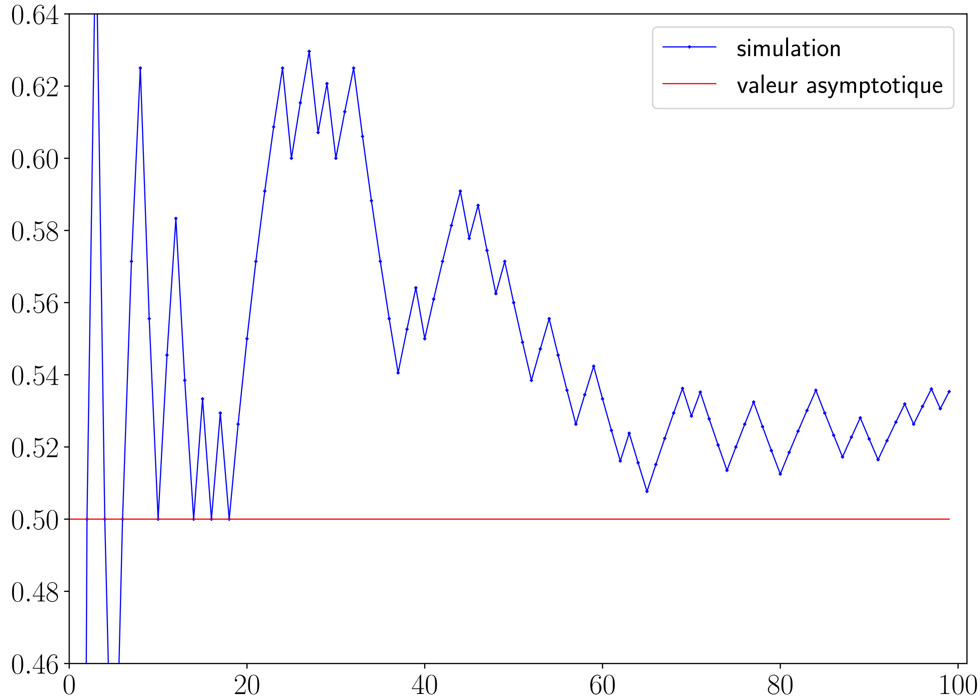

Figure 1. Moyenne empirique du jeu de pile ou face avec 100 expériences

---

François Dubois, novembre 2023.

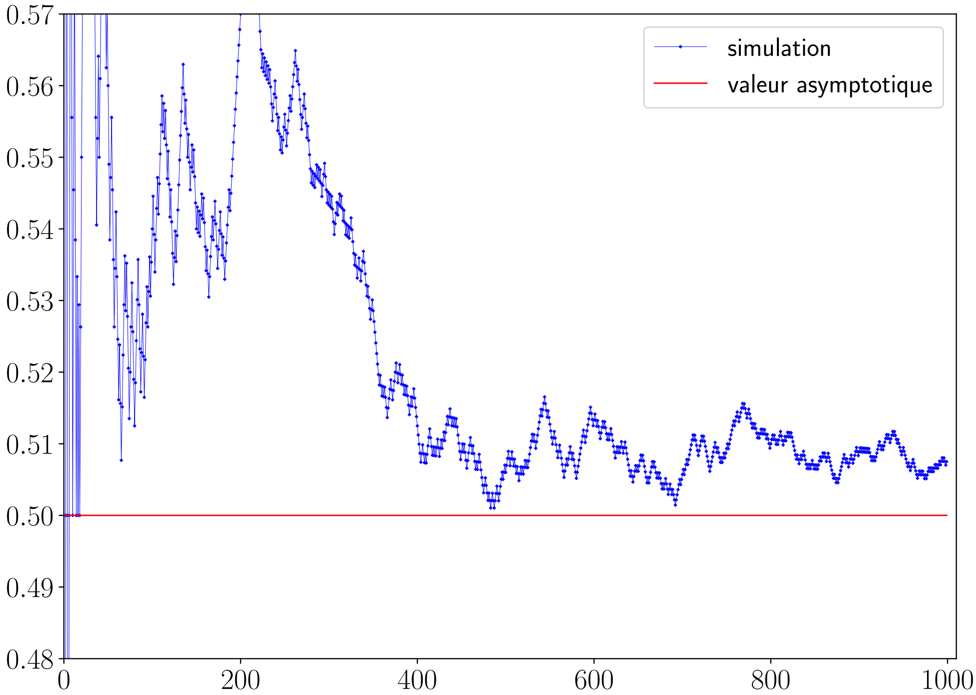

Figure 2. Moyenne empirique du jeu de pile ou face avec 1000 expériences

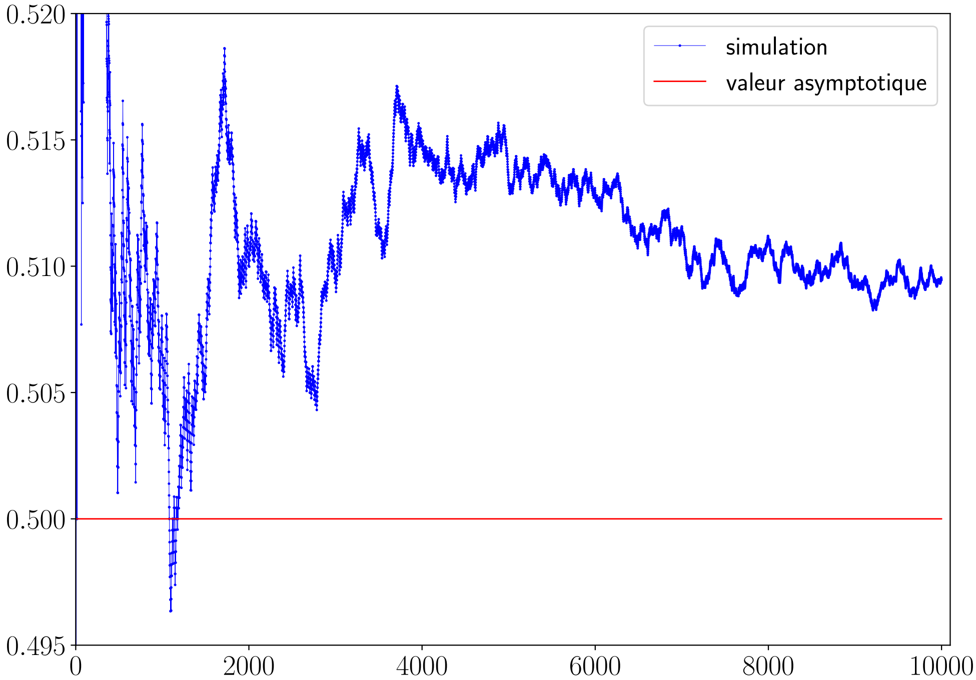

Figure 3. Moyenne empirique du jeu de pile ou face avec 10 000 expériences

Nous constatons que cette convergence ne saute pas aux yeux ! Si la moyenne obtenue après 1000 lacers est certes plus proche de 0,5 qu'après 100 lancers, le résultat après 10000 lancers n'est pas substanciellement plus proche de $\frac{1}{2}$ qu'après 1000 simulations seulement. Une simulation aléatoire demande de la méthode et en particulier de savoir effectuer plusieurs fois de suite la même expérience pour laisser le temps au hasard de se déployer.

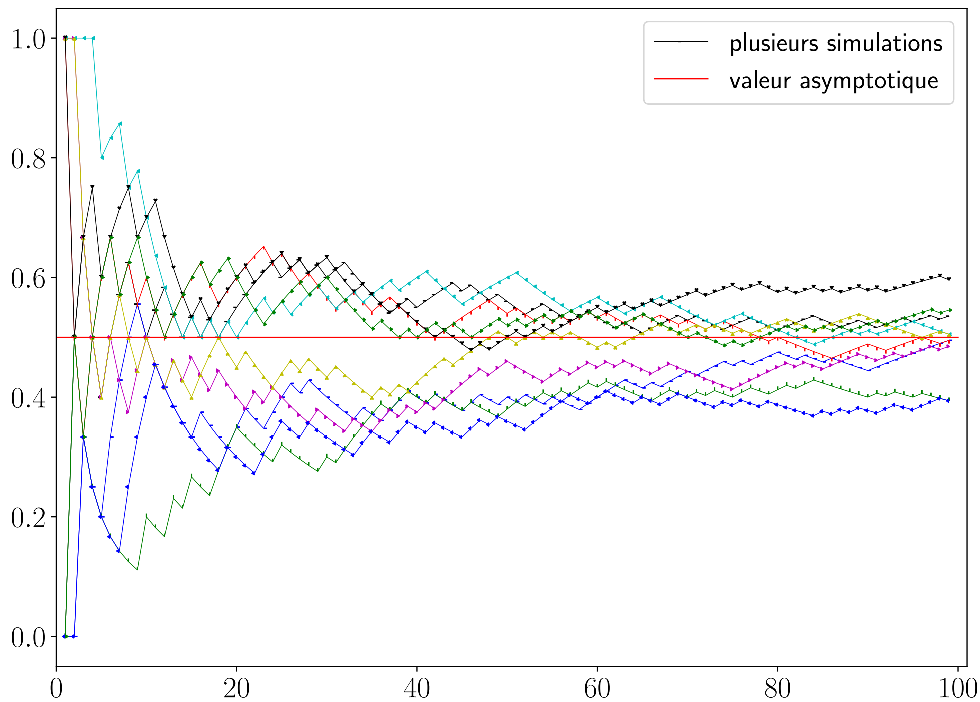

Figure 4. Répétitions du calcul de la moyenne empirique pour 100 expériences

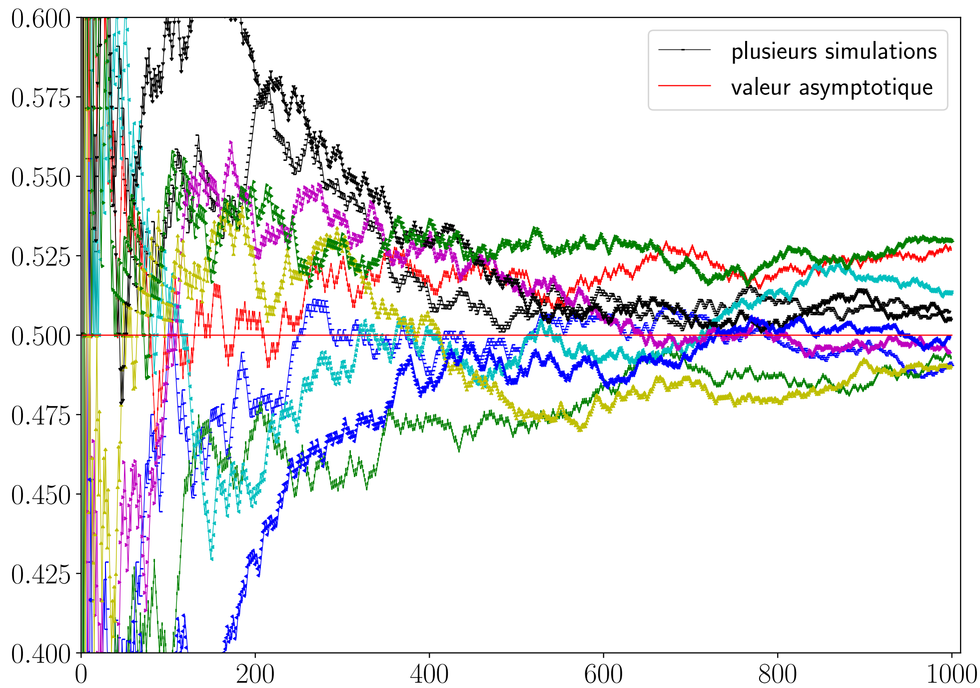

Figure 5. Répétitions du calcul de la moyenne empirique pour 1000 expériences

Dans les expériences suivantes, illustrées aux figures 4 et 5, nous reproduisons les expériences précédentes une dizaine de fois. Au lieu de disposer d'un seul résultat pour la fréquence empirique, nous avons dix réponses et dix courbes représentatives de l'évolution de cette moyenne au cours des itérations. Il est alors clair qu'une seule des courbes des figures 4 et 5 ne suffit pas à décrire l'ensemble du processus de convergence vers la probabilité $\mathrm{P}(F) = \frac{1}{2}$. Nous avons reporté les résultats numériques sur le tableau qui suit, en mesurant la moyenne obtenue pour une suite de dix expériences, pour quatre valeurs de l'entier N : $N = 100$, $N = 1000$, $N = 10000$ et $N = 100000$. Noter que les résultats de la colonne de droite demandent de lancer la pièce un millions de fois !

N	100	1000	10000	100000
1	0.54	0.507	0.5094	0.49855
2	0.60	0.513	0.4986	0.49772
3	0.49	0.509	0.4981	0.50002
4	0.42	0.530	0.5079	0.50247
5	0.48	0.507	0.4981	0.50005
6	0.55	0.511	0.4939	0.50172
7	0.46	0.504	0.4965	0.49900
8	0.54	0.507	0.4942	0.50006
9	0.50	0.497	0.4983	0.49791
10	0.49	0.509	0.4905	0.49786
moyenne des écarts	0.04930	0.01235	0.005798	0.001622
valeur théorique	0.05000	0.01581	0.005000	0.001581

Table 1. Dix expériences similaires pour des ensembles de N de tirages du jeu de pile ou face

Sur les dix lignes du tableau, nous reportons la probabilité P_N^k calculée avec N expériences et relative à l'expérience numéro k. Sur les deux dernières lignes, nous reportons d'abord la moyenne des écarts, c'est à dire l'"écart type empirique" σ_N qui est positif et satisfait à la relation $\sigma_N^2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\big(\mathrm{P}_N^k - \frac{1}{2}\big)^2$ puis la référence théorique de cet écart, qui vaut dans notre cas $(\sigma_N^{\mathrm{th}})^2 = \frac{1}{4N}$. À ce sujet, nous renvoyons le lecteur à tout ouvrage d'introduction au calcul des probabilités, par exemple celui de Jean-François Delmas *Introduction au calcul des probabilités et à la statistique* (Presses de l'ENSTA, 2016) ou aux notes de cours de Bernard Ycart à l'Université Joseph Fourier de Grenoble (www-ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart).

- Loi des grands nombres

Mise en évidence en 1713 par Jacob Bernoulli (1654-1705), elle énonce que si on se donne une famille de variables aléatoires $X_j(\omega)$ "indépendantes et de même loi", où ω désigne le tirage au hasard, la moyenne empirique $Y_N = \frac{1}{N}\big(X_1(\omega)+ ... +X_N(\omega)\big)$ converge vers l'espérance $\mathrm{E}(X)$, appelée aussi "moyenne vraie", de la loi de la variable aléatoire.
Dans le cas du jeu de pile ou face, on peut donner la valeur $X = 0$ à "pile" et la valeur $X = 1$ à "face". Alors $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}$. On peut écrire aussi $\mathrm{P}(F) = \frac{1}{2}$. Si on lance un dé équilibré, on peut proposer par exemple $X(2) = 1$ si le dé tombe sur un "2" et $X(j) = 0$ dans les autres cas. Alors $\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(2) = \frac{1}{6}$.

- Équiprobabilité

En 1812, Pierre-Simon Laplace (1749-1827) formalise la phrase de Pascal "Le hasard est égal" et propose le calcul de la probabilité $\mathrm{P}(A)$ d'un événement donné comme le rapport des cas favorables pour l'événement A ramenés au nombre total de cas possibles :
$\mathrm{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Dans le cas du jeu de pile ou face, il y a un cas favorable (“face”) et deux cas possibles (pile ou face), donc $\mathrm{P}(F) = \frac{1}{2}$. Dans le cas du lancer de dé, il y a un cas favorable (tomber sur la valeur “2”) et six cas possibles, d'où $\mathrm{P}(2) = \frac{1}{6}$.

- Théorie mathématique des probabilités

Proposée par Andrei Kolmogorov en 1933, elle peut se formaliser de la façon suivante dans le cas d'un “univers” fini des situations possibles Ω. L'ensemble Ω permet de décrire toutes les expériences d'un contexte donné. Par exemple, $\Omega = \{0, 1\}^N$ si on lance N fois une pièce de monnaie et $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si on lance une fois un dé. On note $n = |\Omega|$ le nombre d'éléments de Ω et on écrit de façon générique $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$. Noter que l'entier n peut être un grand nombre ; pour le jeu de pile ou face par exemple , on a $n = 2^N$.

Un sous-ensemble $A \subset \Omega$ de l'univers des possibles est appelée “événement” ; notons qu'on peut écrire aussi $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Une probabilité sur Ω est une application P de l'ensemble des parties $\mathscr{P}(\Omega)$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, qui satisfait aux conditions suivantes :

(i) une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1 : pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$,

(i) la probabilité de l'événement certain est égale à 1 : $\mathrm{P}(\Omega) = 1$,

(iii) si A et B sont deux parties disjointes de Ω, on dit aussi que les événements A et B sont “incompatibles”, alors la probabilité de leur réunion est égale à la somme de chacune des probabilités : $\big((A \cap B = \varnothing) \Rightarrow (\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B))\big)$.

On déduit de ces axiomes que la probabilité de l'événement “vide” est nulle : $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$. De plus, si une famille finie A_1, A_2, ... , A_m est composée d'événements deux à deux disjoints, c'est à dire $(A_j \cap A_k = \varnothing)$ si $j \neq k$, la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités : $\big(((A_j \cap A_k = \varnothing) \text{ si } j \neq k) \Rightarrow (\mathrm{P}(\cup_{j=1}^{m} A_j) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{P}(A_j))\big)$. La preuve se fait par récurrence sur l'entier m en commençant avec $m = 2$.

L'événement contraire $\overline{A}$ de l'événement A est par définition sa partie complémentaire $A^{\mathrm{c}} = \Omega \backslash A$. On a $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

- Cas d'équiprobabilité

Si l'univers $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$ comporte n éléments, l'hypothèse d'équiprobabilité exprime que chacun des “événements élémentaires” $\{a_j\}$ a la même probabilité $p = \mathrm{P}(\{a_j\})$ quel que soit l'élément $a_j \in \Omega$. Dans ce cas, on établit sans difficulté que $p = \frac{1}{n}$.

Si $A \subset \Omega$ est un événement quelconque qui comporte $|A|$ éléments, on a $\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ et on retrouve ainsi la relation proposée par Laplace. Le calcul des probabilités se réduit aors à un double problème de dénombrement puisqu'il suffit de calculer le nombre d'éléments de l'univers Ω et de la partie $A \subset \Omega$.

- Un exemple

On lance trois dés distincts qu'on suppose non pipés. Alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^6$ et $|\Omega| = 6^3 = 216$. On peut considérer les trois événements suivants : A : “les trois dés affichent la même valeur”, B : “deux des trois dés affichent la même valeur et le troisième une valeur différente” et C : “les trois dés affichent trois valeurs différentes”. Un calcul de dénombrement laissé au lecteur permet de conclure que $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{36}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{5}{12}$ et $\mathrm{P}(C) = \frac{5}{9}$. Surtout, ces trois événements sont incompatibles : $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$ et leur réunion permet de passer en revue tous les cas possibles : $A \cup B \cup C = \Omega$. On vérifie que la probabilité de cette réunion est bien égale à 1 : $\frac{1}{36} + \frac{5}{12} + \frac{5}{9} = \frac{1}{36}(1+15+20) = 1$.

- Probabilité de la réunion de deux événements

On se donne un univers Ω fini et deux événements A et B quelconques :$A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$. Alors la probabilité de la réunion $A \cup B$ est donnée par la relation suivante :
$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$. Dans le cas où l'intersection est vide, on retrouve bien la relation fondamentale de la théorie mathématique des probabilités.
La preuve consiste à introduire trois sous ensembles de Ω disjoints deux à deux : $A \cap B$, $A \cap B^{\mathrm{c}}$ et $A^{\mathrm{c}} \cap B$. On remarque alors que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^{\mathrm{c}})$, $B = (A \cap B) \cup (A^{\mathrm{c}} \cap B)$ et $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^{\mathrm{c}}) \cup (A^{\mathrm{c}} \cap B)$. Il suffit alors d'utiliser l'axiome *(iii)* trois fois de suite pour aboutir à la conclusion.

- Événements indépendants

Par définition, deux événements $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ et $B \in \mathscr{P}(\Omega)$ sont indépendants relativement à la loi de probabilité P si et seulement si l'on a $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$. On observe que cette définition est fondamentalement liée à la loi de probabilité P: si on change la loi de probabilité pour une autre loi de probabilité, deux événements indépendants peuvent très bien ne pas le rester !
Par exemple, dans une double partie de pile ou face ($\Omega = \{0,\, 1\}^2$), les événements “le résultat de la première partie est pile” et “le résultat de la seconde partie est face” sont indépendants.

- Probabilité conditionnelle

La probabilité conditionnelle d'un événement A relativement à un événement B se note $\mathrm{P}(A|B)$. Elle se lit “probabilité de A sachant B” et elle est calculée *via* la relation $\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.
Si les deux événements A et B sont indépendants, la probabilité de A sachant B est égale à la probabilité de A: $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$ dès que $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$.
La formule de Bayes (Thomas Bayes, 1702-1761) relie les probabilités de A sachant B et de B sachant A: $\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$.

- Le jeu du “solitaire” (“klondike ” en anglais)

Signalons pour terminer qu'à notre connaissance, la théorie des probabilités n'a pas encore su calculer par un calcul direct la probabilité de gagner au jeu du solitaire, une patience très populaire qui utilise un jeu de 52 vartes (voir à ce sujet l'exposé de Persi Diaconis en 2004). On conçoit que la question est difficile puisque le nombre de tirages possibles est égal *a priori* à $52! \simeq 8{,}066\ 10^{67}$. C'est donc un très grand nombre et le jeu lui-même a des règles souples qui permettent plusieurs parties possibles à partir d'une distribution donnée. Une possibilité pour disposer d'une réponse approchée est de simuler le jeu, comme nous l'avons fait pour le jeu de pile ou face, en mettant en œuvre une “méthode de Monte Carlo”, dénomination proposée en 1947 par Nicholas Metropolis et Stanisław Ulam en référence aux jeux de hasard au casino de Monte Carlo. Une autre possibilité est l'expérimentation directe, en jouant beaucoup de parties !

Exercices

- Dé truqué

On considère un dé à six faces numérotées de 1 à 6 tel que la probabilité de tomber sur la face numéro j est proportionnelle au nombre j.
Que valent les probabilités $P(\{j\})$ pour les différentes valeurs de j ?

- Sac aux douze jetons

Un sac contient quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4, quatre jetons verts numérotés de 1 à 4 et quatre jetons bleus numérotés de 1 à 4 . De façon équiprobable, on tire, l'un après l'autre, trois jetons ; on ne remet pas dans le sac un jeton tiré. Le résultat d'un tirage est indiqué par des lettres R, V, B et des chiffres 1, 2, 3, 4, par exemple $(V2, R1, B3)$.
a) Quelle est la probabilité de tirer $(V2, R1, B3)$? $\left[\frac{1}{1320}\right]$
b) On demande quelle est la probabilité la plus grande : tirer trois jetons de la même couleur ou tirer trois jetons portant le même numéro ? Pour cela, on calculera les probabilités des deux événements A : "tirer trois jetons de la même couleur" et B : "tirer trois jetons portant le même numéro". $\left[\frac{3}{55} = p(A) > p(B) = \frac{1}{55}\right]$
c) Les événements précédents sont-ils compatibles ou incompatibles ?
d) Quelle est la probabilité de sortir un jeton rouge en troisième position sachant que l'on a déjà sorti un vert puis un bleu ? $\left[\frac{2}{5}\right]$

- Pile ou face ?

On joue à pile ou face, n fois de suite et les tirages sont supposés indépendants. On note p la probabilité d'obtenir "pile" et f la probabilité d'obtenir "face".
a) Quelle est la probabilité α_k d'obtenir exactement k fois "pile" ? On pourra commencer par traiter le cas particulier où $n = 6$ et $k = 4$.
b) Quelle est la probabilité β d'obtenir strictement plus de "pile" que de "face" ? On aura à distinguer le cas où l'entier n est pair et celui où il est impair.
c) Quelle est la probabilité γ pour ne jamais obtenir le même résultat deux fois de suite ? Comme à la question précédente, on distinguera le cas où l'entier n est pair et celui où il est impair.
d) Quelle est la probabilité δ pour ne jamais obtenir le même résultat deux fois de suite, sachant que le premier essai a donné "pile" comme résultat ?
e) Si les probabilités p et f sont égales et $n = 4$, calculer les nombres β, γ et δ. $\left[\frac{5}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$
f) Avec les hypothèses de la question e), les événements C : "n'obtenir jamais deux fois de suite le même résultat" et D : "obtenir pile au premier essai" sont-ils indépendants ? [oui]

- Mots binaires de longueur 8

On tire au hasard un mot binaire de longueur 8. On suppose les tirages équiprobables.
a) Quel est l'espace des épreuves et combien a-t-il d'éléments ?
b) Déterminer la probabilité p(A) de l'événement A : "le mot tiré contient strictement plus de 1 que de 0" ?
c) Déterminer la probabilité p(B) de l'événement B : "parmi les bits du mot tiré, on trouve les bits 110011 dans cet ordre".

d) Déterminer la probabilité p(C) de l'événement C : "le nombre de bits égaux à 1 du mot tiré est nul ou est un multiple de 4".
e) Les événements B et C sont-ils indépendants ?

• Urne aux vingt jetons
Une urne contient vingt jetons indiscernables au toucher. Cinq jetons portent le numéro 9, deux portent le numéro 8, six le numéro 3 et sept le numéro 1. Lorsque l'on tire au hasard un jeton de l'urne, tous ont la même probabilité d'être obtenus.
a) On tire successivement 4 jetons de l'urne, sans les remettre. En notant dans l'ordre les numéros obtenus, on obtient ainsi un nombre de quatre chiffres (le chiffre de unité correspondant au dernier jeton tiré). Quelle est la probabilité d'obtenir *(i)* le nombre 1983 ? *(ii)* un nombre pair ?
b) On procède comme précédemment mais on remet chaque jeton dans l'urne après l'avoir tiré et noté son numéro. Quelle est la probabilité d'obtenir *(i)* le nombre 1983 ? *(ii)* un nombre pair ?

• Paradoxe des anniversaires
On se place pour simplifier avec un calendrier qui ne contient aucune année bissextile.
a) Quelle est la probabilité que deux personnes choisies au hasard n'aient pas la même date d'anniversaire ? [≈0,9973]
b) Quelle est la probabilité que trois personnes choisies au hasard n'aient pas la même date d'anniversaire ? [≈0,9918]
c) Même question avec quatre personnes choisies au hasard. [≈0,9836]
d) On se donne un nombre N de personnes avec $2 \leq N \leq 365$. Quelle est la probabilité p_N pour qu'aucune de ces N personnes n'aient la même date d'anniversaire ? $\big[p_N = \big(\frac{1}{365}\big)^N A_{365}^N\big]$
e) Application numérique. À partir de combien de personnes réunies ensemble a-t-on une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ d'en compter deux qui ont la même date d'anniversaire ? [23]