le cnam

Algèbre de Boole et Probabilités

Cours 1 Logique des propositions

• La logique ou l'art de bien raisonner

Formalisée par Aristote [384-322 avant J.C.], elle permet de se rendre compte qu'un raisonnement n'est pas correct, comme par exemple dans la phrase "les chats sont mortels, Socrate est mortel, donc Socrate est un chat". La logique permet aussi d'apprécier l'exactitude des raisonnements comme dans la phrase "les hommes sont mortels, Socrate est un homme, donc Socrate est mortel".

La logique est fondée sur une dualité du vrai et du faux. À partir d'hypothèses supposées vraies, elle permet de déduire sans erreur une relation vraie.

• Relation

Une relation est une phrase vraie ou fausse ; elle a un sens de vérité sans ambiguité. Ainsi, on peut considérer les exemples suivants : "Socrate est un homme", "2 est un nombre pair", "6 est un nombre premier", "tous les hommes sont mortels".

• Un premier opérateur logique fondamental : la négation

À partir d'une relation R donnée, on la fait précéder du préfixe "non" pour former une nouvelle relation : $\mathrm{non}\, R$. La relation $(\mathrm{non}\, R)$ exprime le contraire de la relation R. Pour les quatre exemples considérés plus haut, on obtient typiquement par négation : "Socrate n'est pas un homme", "2 est un nombre impair", "6 n'est pas un nombre premier", "il existe au moins un homme immortel".

On peut construire la "table de vérité" de la négation. Si la relation R est vraie, alors la relation $(\mathrm{non}\, R)$ est fausse et si la relation R est fausse, alors la relation $(\mathrm{non}\, R)$ est vraie. On synthétise cette propriété dans le tableau suivant.

R	V	F
non R	F	V

Table de vérité de l'opérateur logique de négation

• Un second opérateur fondamental : la disjonction logique "ou"

À partir cette fois de deux relations R et S, on forme la nouvelle relation $(R\, \mathrm{ou}\, S)$. Ce "ou" logique est un "ou" inclusif ; si les deux relations R et S sont vraies, alors la relation $(R\, \mathrm{ou}\, S)$ est encore vraie. Ce n'est pas comme dans la vie courante où l'on utilise un "ou exclusif", comme au restaurant lorsqu'il est proposé "fromage ou dessert".

La table de vérité comporte quatre cas distincts puisque les deux relations R et S peuvent être vraies ou fausses de façon indépendante. Dans le détail, on a :

si R est vraie et S est vraie, alors $(R\, \mathrm{ou}\, S)$ est vraie,

si R est vraie et S est fausse, alors $(R\, \mathrm{ou}\, S)$ est vraie,

si R est fausse et S est vraie, alors $(R\,\text{ou}\,S)$ est vraie
et si R est fausse et S est fausse, alors $(R\,\text{ou}\,S)$ est fausse.
On résume ces quatre cas de figure dans la table de vérité ci-dessous.

S \ R	V	F
V	V	V
F	V	F

Table de vérité de l'opérateur de disjonction logique "ou"

- Opérateurs logiques dérivés

La conjonction "et", l'implication "$\Rightarrow$" et l'équivalence logique "$\Leftrightarrow$" sont des opérateurs logiques dérivés. Ils sont construits à partir des opérateurs fondamentaux "non" et "ou".

- Conjonction logique "et"

On se donne deux relations R et S. Par définition, la conjonction logique $(R\,\text{et}\,S)$ désigne la relation $\big(\text{non}\,\big((\text{non}\,R)\,\text{ou}\,(\text{non}\,S)\big)\big)$. Afin de mettre en évidence la table de vérité de $(R\,\text{et}\,S)$ à l'aide d'un tableau à double entrée, on fait d'abord un calcul étape par étape de la valeur de vérité de $(R\,\text{et}\,S)$, à l'aide d'un tableau qui s'appelle aussi "table de vérité".

R	V	V	F	F
S	V	F	V	F
non R	F	F	V	V
non S	F	V	F	V
(non R) ou (non S)	F	V	V	V
R et S	V	F	F	F

S \ R	V	F
V	V	F
F	F	F

Détermination de la table de vérité de l'opérateur de conjonction logique "et" (à gauche) et table de vérité de cet opérateur logique (à droite).

- Implication logique "$\Rightarrow$"

On se donne deux relations R et S. Par définition, l'implication $(R \Rightarrow S)$ désigne la relation $\big((\text{non}\,R)\,\text{ou}\,S\big)$. Nous construisons la table de vérité petit à petit comme pour le cas de la conjonction.

R	V	V	F	F
S	V	F	V	F
non R	F	F	V	V
$R \Rightarrow S$	V	F	V	V

S \ R	V	F
V	V	V
F	F	V

Détermination de la table de vérité de l'opérateur d'implication logique "$\Rightarrow$" (à gauche) et table de vérité de cet opérateur logique (à droite).

On remarque que "le faux implique toujours le vrai" : si la relation R est fausse, alors l'implication logique $(R \Rightarrow S)$ est toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité de la relation S.
L'implication logique formalise le traditionnel *modus ponens* qui permet la déduction. En effet, si la relation R est vraie et si l'implication logique $(R \Rightarrow S)$ est vraie, alors la relation S est vraie.

• Équivalence logique "$\Leftrightarrow$"

On se donne deux relations R et S. Par définition, l'équivalence logique $(R \Leftrightarrow S)$ désigne la relation $\big((R \Rightarrow S)\,\mathrm{et}\,(S \Rightarrow R)\big)$. Comme pour les cas précédents, nous construisons la table de vérité petit à petit.

R	V	V	F	F
S	V	F	V	F
$R \Rightarrow S$	V	F	V	V
$S \Rightarrow R$	V	V	F	V
$R \Leftrightarrow S$	V	F	F	V

S \ R	V	F
V	V	F
F	F	V

Détermination de la table de vérité de l'équivalence logique $(R \Leftrightarrow S)$ (à gauche) et table de vérité de cet opérateur logique (à droite).

Lorsque l'équivalence logique est vraie, les deux relations R et S ont même valeur de vérité. Réciproquement, si les deux relations R et S ont même valeur de vérité, alors l'équivalence logique $(R \Leftrightarrow S)$ est vraie.

• Introduction à la logique mathématique (d'après le *Cours d'Algèbre* de Roger Godement)

Une théorie mathématique se compose d'axiomes qui sont des énoncés supposés vrais. Par définition, un axiome ne se démontre pas.

Un exemple fameux d'axiome est l'"axiome des parallèles" énoncé par Euclide dans ses *Éléments* vers 300 avant J.C. Si on se donne une droite D dans un plan et un point P qui n'appartient pas à cette droite, alors il existe une unique droite Δ du plan qui est parallèle à D et contient le point P. De nombreux mathématiciens ont essayé de démonter cette propriété à partir des autres axiomes de la géométrie avant qu'on se rende compte au 19e siècle qu'on peut très bien construire des géométries, dites "non-euclidiennes", où l'axiome des parallèles n'est pas satisfait.

Un théorème est une propriété mathématique qui se déduit logiquement des axiomes. La logique mathématique ne suppose pas connues les tables de vérité. Elle introduit les opérateurs "non" et "ou" qui agissent sur une ou deux relations de manière abstraite. Elle définit ensuite les opérateurs "et ", "$\Rightarrow$" et " $\Leftrightarrow$" comme ci-dessus. Elle se compose enfin de quatre axiomes et permet de déduire un certain nombre de théorèmes.

• Les quatre axiomes de la logique mathématique

Axiome 1. Soit R une relation. La relation $\big((R\,\mathrm{ou}\,R) \Rightarrow R\big)$ est toujours vraie. On parle alors aussi de tautologie, relation toujours vraie quelle que soit la valeur de vérité des relations qui la composent.

Axiome 2. Soit R et S deux relations. La relation $\big(R \Rightarrow (R\,\mathrm{ou}\,S)\big)$ est toujours vraie.

Axiome 3. Soit R et S deux relations. La relation $\big((R\,\mathrm{ou}\,S) \Rightarrow (S\,\mathrm{ou}\,R)\big)$ est toujours vraie. Elle entraîne la commutativité de l'opération "ou" entre deux relations.

Axiome 4. Soit R, S et T trois relations. La relation $\big((R \Rightarrow S) \Rightarrow \big((R\,\mathrm{ou}\,T) \Rightarrow (S\,\mathrm{ou}\,T)\big)\big)$ est toujours vraie.

- Quelques théorèmes de la logique mathématique

Théorème 1. Transitivité des déductions

Soit R, S et T trois relations. Si les implications $(R \Rightarrow S)$ et $(S \Rightarrow T)$ sont vraies toutes deux, alors l'implication $(R \Rightarrow T)$ est vraie.

Théorème 2. Tiers exclu

Soit R une relation. Alors la relation $(R \Rightarrow R)$ est vraie. En d'autres termes, la relation $\big((\mathrm{non}\, R)\, \mathrm{ou}\, R\big)$ est toujours vraie.

Théorème 3. Double négation

Soit R une relation. Alors la relation $\big(R \Leftrightarrow \mathrm{non}\,(\mathrm{non}\, R)\big)$ est vraie. En d'autres termes, les relations R et $\big(\mathrm{non}\,(\mathrm{non}\, R)\big)$ ont toujours la même valeur de vérité ; elles sont équivalentes. En pratique, on peut remplacer la relation $\big(\mathrm{non}\,(\mathrm{non}\, R)\big)$ par la relation R.

Théorème 4. Contraposition

Soit R et S deux relations. La relation $\big((R \Rightarrow S) \Leftrightarrow ((\mathrm{non}\, S) \Rightarrow (\mathrm{non}\, R))\big)$ est toujours vraie. Pour démontrer une implication, il suffit de démontrer la contraposée. C'est parfois tout à fait pratique !

Théorème 5. Formalisation du “et”

Soit R et S deux relations. Les relations $\big((R\, \mathrm{et}\, S) \Rightarrow R\big)$ et $\big((R\, \mathrm{et}\, S) \Rightarrow S\big)$ sont vraies. Si de plus, les relations R et S sont vraies, alors la relation $(R\, \mathrm{et}\, S)$ est vraie. Le “et” de la logique formalise le mot usuel “et”.

Théorème 6. Disjonction des cas

Soit R, S et T trois relations. Si les relations $(R\, \mathrm{ou}\, S)$, $(R \Rightarrow S)$ et $(S \Rightarrow T)$ sont vraies toutes les trois, alors la relation T est vraie.

- Raisonnement par l'absurde

Une relation à la fois vraie et fausse est dite contradictoire. C'est le type même de relation que fuit le logicien car il fait s'écrouler toute sa théorie logique. On a en effet la proposition suivante.

Proposition. Toute contradiction se propage instantanément à l'ensemble de la logique

Si on dispose d'une relation R à la fois vraie et fausse, alors il en est de même de toute autre relation S, qui est alors également à la fois vraie et fausse, c'est à dire contradictoire.

Pour démontrer qu'une relation R est vraie, on peut faire un “raisonnement par l'absurde”. On ajoute la relation $(\mathrm{non}\, R)$ aux axiomes de la théorie. On montre que l'on aboutit à une contradiction, c'est à dire qu'on met en évidence une relation S à la fois vraie est fausse. Comment en déduit-on qu'alors la relation R est nécéssairement vraie ? Nous allons effectuer une preuve tout à fait caractéristique du mode de raisonnement de la logique mathématique.

Comme on a mis en évidence une contradiction, c'est à dire une relation S à la fois vraie et fausse, on sait grâce à la proposition ci-dessus qu'il en est de même de toute autre relation, en l'occurence de la relation R. De plus, la relation R, à la fois vraie et fausse, est en particulier vraie. On a donc finalement démontré que l'implication $\big((\mathrm{non}\, R) \Rightarrow R\big)$ est vraie.

Alors l'axiome 4, avec R remplacé par $(\mathrm{non}\, R)$, S par R et T par R exprime que l'implication $\big(((\mathrm{non}\, R) \Rightarrow R) \Rightarrow \big(((\mathrm{non}\, R)\, \mathrm{ou}\, R) \Rightarrow (R\, \mathrm{ou}\, R)\big)\big)$ est vraie. Comme la relation $\big((\mathrm{non}\, R) \Rightarrow R\big)$

est vraie puisque nous venons de l'établir, l'implication $\big(((\text{non}\,R)\,\text{ou}\,R) \Rightarrow (R\,\text{ou}\,R)\big)$ est vraie. Or le théorème 2 du tiers exclu affirme que la relation $\big((\text{non}\,R)\,\text{ou}\,R\big)$ est toujours vraie. Donc la relation $(R\,\text{ou}\,R)$ est vraie. On sait aussi (axiome 1) que l'implication $\big((R\,\text{ou}\,R) \Rightarrow R\big)$ est toujours vraie. Comme la relation $(R\,\text{ou}\,R)$ est vraie, on en déduit que la relation R est vraie et le résultat est établi.
Avec cette démonstration, on se rend compte que le raisonnement par l'absurde est le résultat d'une construction logique tout à fait élaborée d'un point de vue mathématique.

- Propriétés complémentaires

Commutativité de l'opérateur "ou".
Soit R et S deux relations. Alors la relation $\big((R\,\text{ou}\,S) \Leftrightarrow (S\,\text{ou}\,R)\big)$ est vraie.

Commutativité de l'opérateur "et".
Soit R et S deux relations. Alors la relation $\big((R\,\text{et}\,S) \Leftrightarrow (S\,\text{et}\,R)\big)$ est vraie.
Associativité de l'opérateur "ou".
Soit R, S et T trois relations. Alors la relation $\big((R\,\text{ou}\,S)\,\text{ou}\,T) \Leftrightarrow (R\,\text{ou}\,(S\,\text{ou}\,T))\big)$ est vraie. On place comme on veut les parenthèses lors d'occurences successives de l'opérateur "ou".
Associativité de l'opérateur "et".
Soit R, S et T trois relations. Alors la relation $\big((R\,\text{et}\,S)\,\text{et}\,T) \Leftrightarrow (R\,\text{et}\,(S\,\text{et}\,T))\big)$ est vraie. On place comme on veut les parenthèses lors d'occurences successives de l'opérateur "et".

Négation de la conjonction (première loi de De Morgan)
Soit R et S deux relations. Alors la relation $\big((\text{non}\,(R\,\text{et}\,S)) \Leftrightarrow ((\text{non}\,R)\,\text{ou}\,(\text{non}\,S))\big)$ est vraie. On remarque que l'action de l'opérateur de négation sur cette relation exprime exactement la définition de l'opérateur logique "et".

Négation de la disjonction (seconde loi de De Morgan)
Soit R et S deux relations. Alors la relation $\big((\text{non}\,(R\,\text{ou}\,S)) \Leftrightarrow ((\text{non}\,R)\,\text{et}\,(\text{non}\,S))\big)$ est vraie. Si on remplace R par $(\text{non}\,R)$ et S par $(\text{non}\,S)$, on retrouve encore une fois la définition de l'opérateur "et".

Distributivité du "et" par rapport au "ou"
Soit R, S et T trois relations. Alors la relation $\big((R\,\text{et}\,(S\,\text{ou}\,T)) \Leftrightarrow ((R\,\text{et}\,S)\,\text{ou}\,(R\,\text{et}\,T))\big)$ est vraie.

Distributivité du "ou" par rapport au "et"
Soit R, S et T trois relations. Alors la relation $\big((R\,\text{ou}\,(S\,\text{et}\,T)) \Leftrightarrow ((R\,\text{ou}\,S)\,\text{et}\,(R\,\text{ou}\,T))\big)$ est vraie.

On remarque que pour les nombres ordinaires, on a effectivement la distributivité de la multiplication relativement à l'addition ; on a par exemple $2 \times (3+4) = (2 \times 3) + (2 \times 4)$. Mais on n'a pas la distributivité de l'addition relativement à la multiplication, puisqu'il est clair par exemple que $2 + (3 \times 4) \neq (2+3) \times (2+4)$.

Exercices

- Transitivité des déductions

À l'aide d'une table de vérité, établir le théorème 1 sur la transitivité des déductions.
On se donne trois relations R, S et T et on suppose que les implications $(R \Rightarrow S)$ et $(S \Rightarrow T)$ sont vraies toutes les deux. Démontrer qu'alors l'implication $(R \Rightarrow T)$ est vraie.

- Disjonction des cas

a) À l'aide d'une table de vérité, démontrer le théorème 6 de disjonction des cas. On se donne trois relations R, S et T et on suppose que les trois relations $(R \,\mathrm{ou}\, S)$, $(R \Rightarrow S)$ et $(S \Rightarrow T)$ sont vraies toutes les trois. Prouver que dans ces conditions, la relation T est vraie.
b) Remarquer que la relation T peut être vraie sans que les trois relations $(R \,\mathrm{ou}\, S)$, $(R \Rightarrow S)$ et $(S \Rightarrow T)$ soient vraies simultanément.

- On ne peut rien déduire d'une hypothèse fausse

On se donne deux relations R et S.
a) Montrer que si la relation R est fausse, alors l'implication $(R \Rightarrow S)$ est vraie.
b) Peut-on en déduire que la relation S est vraie ?

- À propos de l'équivalence logique

a) À l'aide d'une table de vérité, montrer la tautologie de l'équivalence logique suivante : $\big((R \Leftrightarrow S) \Leftrightarrow ((R \,\mathrm{et}\, S) \,\mathrm{ou}\, ((\mathrm{non}\, R) \,\mathrm{et}\, (\mathrm{non}\, S)))\big)$.
b) Reprendre la démonstration de cette propriété en partant de la définition de l'équivalence logique : $(R \Leftrightarrow S)$ signifie $\big((R \Rightarrow S) \,\mathrm{et}\, (S \Rightarrow R)\big)$ et en faisant des calculs à l'aide des lois de De Morgan et des propriétés de distributivité.
c) Avec les mêmes méthodes de calcul, reprendre une nouvelle fois la démonstration de cette propriété en partant mainteant de la relation $\big((R \,\mathrm{et}\, S) \,\mathrm{ou}\, ((\mathrm{non}\, R) \,\mathrm{et}\, (\mathrm{non}\, S))\big)$ pour aboutir à la définition de l'équivalence $(R \Leftrightarrow S)$.

- Dans certains contextes, une phrase peut être ni vraie ni fausse !

a) Dans son roman *Don Quichotte*, Cervantes rapporte une anecdote que l'on peut illustrer de la façon suivante. Une bande peu recommendable somme un malheureux voyageur de dire une phrase de son choix. Si cette phrase est vraie, il sera pendu et si elle est fausse, il sera noyé. Que peut dire le voyageur pour sortir de ce piège ?
b) Quelle est la valeur de vérité de la phrase "je mens" ?