le cnam

Algèbre de Boole et Probabilités

Cours 2 Induction et logique des prédicats

- Notion de prédicat

Un prédicat est une relation paramétrée par un objet quelconque x. On le note typiquement sous la forme $R(x)$, où le paramètre x peut prendre une valeur tout à fait arbitraire.

Quand on remplace x par une valeur particulière A, qui est lui un objet fixé, on obtient une relation $R(A)$ au sens présenté dans le chapitre précédent. En particulier, la relation $R(A)$ est vraie ou fausse.

Par exemple, si on note $R(x)$ la relation "x est un homme", elle est vraie si on remplace x par "Socrate" mais elle est fausse si on pose $x = 2$. De façon analogue pour la relation "x est un nombre pair" : elle est fausse si on remplace x par "Socrate" et elle est vraie si on suppose $x = 2$.

- Prédicat vrai

Si le prédicat $R(x)$ est vrai, ceci signifie que la relation $R(A)$ est vraie quand on remplace x par tout objet A fixé.

La relation paramétrée $x = x$ donne un exemple de prédicat vrai.

- Quantificateurs

Les quantificateurs existentiel "$\exists$" et universel "$\forall$" permettent de former de nouvelles relations à partir de relations paramétrées.

Les notations "$\exists$" et "$\forall$" ont été introduites par Gerhardt Gentzen [1909-1945]

- Quantificateur existentiel "$\exists$"

On se donne une relation paramétrée $R(x)$. Dire que la relation $\big(\exists x, R(x)\big)$ est vraie permet d'exprimer qu'il existe un x tel que $R(x)$ est vrai. La relation $\big(\exists x, R(x)\big)$ est vraie si et seulement si on peut trouver un objet A fixé de sorte que la relation $R(A)$ est vraie.

- Quantificateur universel "$\forall$"

On se donne une relation paramétrée $R(x)$. Par définition, la relation $\big(\forall x, R(x)\big)$ signifie $\big(\text{non}\,\big(\exists x, (\text{non}\,R(x))\big)\big)$.

La relation $\big(\forall x, R(x)\big)$ est vraie si et seulement si pour tout objet A choisi de façon tout à fait arbitraire, la relation $R(A)$ est vraie. En d'autres termes, la relation $\big(\forall x, R(x)\big)$ est vraie si et seulement si pour toute valeur du paramètre x, la relation $R(x)$ est vraie.

- Lien entre les quantificateurs et les opérateurs de disjonction et de conjonction

Le quantificateur existentiel peut être considéré comme l'action d'une infinité de "ou".

En effet, $(\exists x, R(x))$ signifie $\big(R(x_1)\,\text{ou}\,R(x_2)\,\text{ou}\,\cdots\big)$ dans l'hypothèse simple ou on pourrait énumérer toutes les valeurs possibles de x.

François Dubois, octobre 2020.

Le quantificateur universel peut être considéré comme une infinité de “et”
De façon analogue au quantificateur existentiel et dans l’hypothèse simple ou il serait possible d’écrire successivement toutes les valeurs possibles du paramètre x, $(\forall x, R(x))$ signifie $\big(R(x_1)\,\text{et}\,R(x_2)\,\text{et}\,\cdots\big)$.

- Un cinquième axiome pour la logique mathématique

Aux quatre axiomes proposés à la leçon précédente, on doit en adjoindre un cinquième afin de prendre en compte les deux quantificateurs introduits plus haut.
Si $R(x)$ désigne une relation paramétrée et A un objet quelconque, on postule que l’implication $\big(R(A) \Rightarrow (\exists x, R(x))\big)$ est vraie. En particulier, si la relation $R(A)$ est vraie, alors la relation $(\forall x, R(x))$ est vraie.
On peut maintenant énoncer plusieurs théorèmes complémentaires

- Théorème d’explicitation

On se donne une relation paramétrée $R(x)$ et un objet quelconque A.
La relation $\big((\forall x, R(x)) \Rightarrow R(A)\big)$ est vraie.

- Théorème de négation du symbole universel (Loi de De Morgan généralisée)

On se donne une relation paramétrée $R(x)$.
La relation $\Big(\big(\text{non}\,(\forall x, R(x))\big) \Leftrightarrow \big(\exists x, (\text{non}\,R(x))\big)\Big)$ est vraie.

- Théorème de négation du symbole existentiel (Loi de De Morgan généralisée)

On se donne une relation paramétrée $R(x)$.
La relation $\Big(\big(\text{non}\,(\exists x, R(x))\big) \Leftrightarrow \big(\forall x, (\text{non}\,R(x))\big)\Big)$ est vraie.

- Théorème de distributivité de l’existentiel par rapport à la disjonction

On se donne deux relations paramétrées $R(x)$ et $S(x)$.
La relation $\Big(\big(\exists x, (R(x)\,\text{ou}\,S(x))\big) \Leftrightarrow \big((\exists x, R(x))\,\text{ou}\,(\exists x, S(x))\big)\Big)$ est vraie.

- Théorème de distributivité de l’universel par rapport à la conjonction

On se donne deux relations paramétrées $R(x)$ et $S(x)$.
La relation $\Big(\big(\forall x, (R(x)\,\text{et}\,S(x))\big) \Leftrightarrow \big((\forall x, R(x))\,\text{et}\,(\forall x, S(x))\big)\Big)$ est vraie.

- Théorème d’échange de l’existentiel et de l’universel

On se donne une relation $R(x, y)$ paramétrée par deux arguments x et y. Les trois relations suivantes sont vraies
$\Big(\big(\forall x, (\forall y, R(x, y))\big) \Leftrightarrow \big(\forall y, (\forall x, R(x, y))\big)\Big)$
$\Big(\big(\exists x, (\exists y, R(x, y))\big) \Leftrightarrow \big(\exists y, (\exists x, R(x, y))\big)\Big)$
$\Big(\big(\exists x, (\forall y, R(x, y))\big) \Rightarrow \big(\forall y, (\exists x, R(x, y))\big)\Big)$.
Attention, la réciproque de la dernière implication est fausse. Si la relation $\big(\forall y, (\exists x, R(x, y))\big)$ est vraie, alors pour tout y, on peut trouver un x qui dépend *a priori* de y, de sorte que $R(x, y)$ soit vraie. La relation $\big(\exists x, (\forall y, R(x, y))\big)$ exprime qu’on peut fixer x une bonne fois pour toutes de sorte que pour tout y, la relation $R(x, y)$ soit vraie. Expliciter un contre-exemple n’est pas si facile et nous allons le construire dans ce qui suit.

- Quantificateur existentiel avec unicité “$\exists!$”

Les symboles “$\exists! x$” expriment qu’il existe un unique x. Ainsi, la relation $\big(\exists! x, R(x)\big)$ est équivalente à $\big(\exists x, R(x)\big)\,\text{et}\,\Big(\forall x, \big(\forall y, \big((x \neq y) \Rightarrow \big((\text{non}\,R(x))\,\text{ou}\,(\text{non}\,R(y))\big)\big)\big)\Big)$. Il existe x tel

que $R(x)$ et de plus cet "x" est unique. On peut aussi exprimer l'implication de la relation précédente par contraposition. On obtient alors par définition la vérité de la relation suivante :
$\big((\exists! x, R(x)\big) \Leftrightarrow \big((\exists x, R(x))\,\mathrm{et}\,(\forall x, (\forall y, ((R(x)\,\mathrm{et} R(y)) \Rightarrow (x=y)))))\big)$.
Si la relation $R(x)$ est satisfaite par deux objets A et B, alors ces objets sont égaux.
L'exemple de l'axiome des parallèles ou "cinquième postulat" dans les *Éléments* d'Euclide, peut s'exprimer à l'aide des quantificateurs introduits au dessus :
$\forall D$ droite du plan, $\forall P$ point du plan, $\exists! \Delta$ droite du plan telle que la droite Δ contient le point P et les droites D et Δ sont parallèles.

- Axiomatique de Peano pour la collection des entiers naturels ($\mathbb{N}$)

La suite $0, 1, 2, \cdots$ des nombres entiers naturels est supposée bien connue du lecteur. Nous présentons l'axiomatique proposée par Giuseppe Peano [1858-1932]. Nous proposons toutefois d'en donner une axiomatique très classique, introduite à la fin du 19e siècle.

Axiome 1. Zéro (noté 0) est un entier naturel.

Axiome 2. Tout entier naturel n admet un unique sucesseur $S(n)$. Ce successeur est lui aussi un entier naturel : $\forall n$ entier naturel, $\exists! S(n)$ entier naturel.

Axiome 3. Aucun entier naturel n n'admet zéro comme successeur ; zéro n'est le successeur d'aucun nombre : $\forall n$ entier naturel, $S(n) \neq 0$.

Axiome 4. Deux entiers naturels ayant le même successeur sont égaux (on dit aussi que S est une application injective) :
$\big((\forall n$ entier naturel), $(\forall m$ entier naturel), $\big((S(n) = S(m)) \Rightarrow (n = m)\big)\big)$.
Axiome 5. Raisonnement par récurrence, ou induction. Si une collection d'entiers naturels N' contient zéro et contient aussi le successeur de chacun des objets qui la constituent, alors la collection N' est égale à $\mathbb{N}$ tout entier.
Si on dispose d'une relation $R(n)$ paramétrée par les entiers naturels telle que d'une part $R(0)$ est vraie et d'autre part l'implication $\big(R(n) \Rightarrow R(S(n))\big)$ est vraie, alors la relation $R(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels.
Cet axiome de l'induction peut être vu comme un *modus ponens* généralisé. La relation $R(0)$ est vraie et l'implication $(R(0) \Rightarrow R(S(0)))$ est vraie. Donc la relation $R(S(0))$ est vraie. On recommence ensuite en partant de $S(0)$. Alors $R(S(S(0)))$ est une relation vraie. Ainsi de proche en proche, en considérant d'un seul regard la collection (infinie !) de tous les entiers naturels, La relation $R(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels.

Le successeur de zéro s'écrit unsuellement 1 (un). Le successeur de 1 se nomme 2 (deux) ; *et caetera*. Le successeur $S(n)$ du nombre entier n se note traditionnement $n+1$. La collection $\mathbb{N}$ des entiers naturels se compose d'une infinité de nombres.

- Une relation entre les nombres entiers

On se donne deux nombres entiers x et y. On dit que x est supérieur ou égal à y et on écrit $x \geq y$ si l'entier x peut être obtenu en faisant agir l'opération S de successeur un nombre fin de fois pour aboutir au nombre entier x. Ainsi, $S(y) \geq y$, $S(S(y)) \geq y$, *etc*.

• L'implication $\big((\forall y,\, (\exists x,\, R(x,y))\big) \Rightarrow \big(\exists x,\, (\forall y,\, R(x,y))\big)\big)$ est fausse en général
Nous allons, dans le contexte des entiers naturels, mettre en évidence une relation paramétrée $R(x,y)$ telle que la relation $\big(\forall y,\, (\exists x,\, R(x,y))\big)$ est vraie et la relation $\big(\exists x,\, (\forall y,\, R(x,y))\big)$ est fausse. Ainsi, la négation de l'implication $\big((\forall y,\, (\exists x,\, R(x,y))\big) \Rightarrow \big(\exists x,\, (\forall y,\, R(x,y))\big)\big)$ est vraie.
Nous définissons $R(x,y)$ par $x \geq y$ en se restreignant à des nombres entiers naturels x et y. Alors la relation ($\forall y$ entier naturel, $\exists x$ entier naturel tel que $x \geq y$) est vraie. Il suffit de choisir par exemple $x = S(y)$. On observe que ce choix dépend explicitement du nombre entier y. Par contre, la relation ($\exists x$ entier naturel, $\forall y$ entier naturel, on a $x \geq y$) exprime qu'il existe un nombre entier x supérieur ou égal à tous les nombres entiers y. En d'autre termes, que la collection $\mathbb{N}$ de tous les nombres entiers admet un plus grand élément. Or cette propriété est fausse. La collection des entiers naturels se poursuit indéfiniment avec des nombres toujours plus grands. Nous avons mis en évidence un exemple où l'implication
$\big((\forall y,\, (\exists x,\, R(x,y))\big) \Rightarrow \big(\exists x,\, (\forall y,\, R(x,y))\big)\big)$ est en défaut. Nous observons que nous avons contextualisé l'étude en supposant que les objets x et y ne sont pas tout à fait quelconques puisque ce sont pour cet exemple des entiers naturels.

Exercices

• Négation du quantificateur existentiel avec unicité : "$\exists !$"
Avec les règles d'action de l'opérateur de négation connues, expliciter en termes de relations logiques ce que signifie la relation $\big(\mathrm{non}\,(\exists!\, x,\, R(x))\big)$.

• Quantificateur universel et disjonction : un cas particulier
a) On se donne trois relations R, T et U. Montrer que la distributivité du "ou" par rapport au "et" peut s'écrire $\big((R\,\mathrm{ou}\,(T\,\mathrm{et}\,U)) \Leftrightarrow ((R\,\mathrm{et}\,T)\,\mathrm{ou}\,(R\,\mathrm{et}\,U))\big)$.
b) Démontrer la relation précédente à l'aide d'une table de vérité.
c) Établir l'équivalence $\big((\forall x, (R\,\mathrm{ou}\,S(x))) \Leftrightarrow (R\,\mathrm{ou}\,(\forall x, S(x)))\big)$.
d) Montrer que dans le cas très simple où la variable x ne peut prendre que deux valeurs x_1 et x_2, l'équivalence de la question c) se remène à la distributivité établie aux questions a) et b).

• Quantificateur existentiel et conjonction : un cas particulier
a) On se donne trois relations R, T et U. Montrer que la distributivité du "et" par rapport au "ou" peut s'écrire $\big((R\,\mathrm{et}\,(T\,\mathrm{ou}\,U)) \Leftrightarrow ((R\,\mathrm{ou}\,T)\,\mathrm{et}\,(R\,\mathrm{et}\,U))\big)$.
b) Démontrer la relation précédente à l'aide d'une table de vérité.
c) Établir l'équivalence $\big((\exists x, (R\,\mathrm{et}\,S(x))) \Leftrightarrow (R\,\mathrm{et}\,(\exists x, S(x)))\big)$.
d) Montrer que dans le cas simple où la variable x ne peut prendre que deux valeurs x_1 et x_2, l'équivalence de la question c) se remène à la distributivité établie aux questions a) et b).
e) Retrouver toutes les propriétés précédentes à partir des résultats établis lors de l'exercice précédent.

- Identités pour des sommes de nombres entiers

On suppose connues dans cet exercice les règles usuelles d'addition et de multiplication des nombres entiers, ainsi que les méthodes usuelles de l'algèbre.
Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose $S_n = 1 + 2 + \ldots + n$,
$\Sigma_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ et $\Phi_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

a) Établir que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a $S_n = \frac{n\,(n+1)}{2}$. On pourra faire une preuve par récurrence.

b) Démontrer par récurrence que si n est un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a $\Sigma_n = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$.

c) Montrer par induction le théorème de Nicomaque de Gérase [$\simeq$ 150 ap. J.-C.] :
$\Phi_n = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = S_n^2$.