

Examen du 21 avril 2021 (3 heures)

*Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies.
Les trois exercices sont indépendants.*

Exercice 1) Arithmétique

On désigne par \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs. On se propose dans cet exercice de décrire toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $104x - 195y = 13$.

- Quel est le plus grand commun dénominateur de 104 et 195 ?
- À l'aide de l'algorithme d'Euclide, en déduire une solution particulière de l'équation $104x - 195y = 13$.
- Montrer que la solution générale de l'équation homogène $104x - 195y = 0$ s'obtient à l'aide d'un unique coefficient indéterminé $k \in \mathbb{Z}$.
- Décrire toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $104x - 195y = 13$.

Exercice 2) Probabilités

Une urne contient 15 boules blanches, 7 jaunes et 15 noires. On tire trois boules de l'urne en une seule fois et sans remise.

- Quelle est la probabilité que le tirage donne trois boules de trois couleurs différentes ?
- Quelle est la probabilité que le tirage donne trois boules de deux couleurs différentes ?
- Quelle est la probabilité que le tirage donne trois boules d'une seule couleur ?
- Les résultats que vous avez obtenus aux questions a), b) et c) sont-ils cohérents ?
- On remet les trois boules tirées dans l'urne et on tire au hasard une seule boule. On constate qu'elle n'est pas noire. Quelle est la probabilité qu'elle soit jaune ?

Exercice 3) Fonctions booléennes

On se donne quatre variables booléennes a, b, c et d et on définit l'application f de \mathbb{B}^4 dans \mathbb{B} par $f(a, b, c, d) = acd \vee \bar{a}c\bar{d} \vee a\bar{b}c \vee a\bar{c}d \vee \bar{a}\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{b}\bar{c}$.

- Construire le diagramme de Karnaugh de cette fonction booléenne.
- En déduire qu'on peut synthétiser la fonction f avec une chaîne de contacts que l'on précisera comportant au plus six interrupteurs.
- Avec la méthode de votre choix, résoudre le système d'équations $f(a, b, c, d) = 1$ et $cd = 1$.
- Avec la méthode de votre choix, résoudre l'équation $f(a, b, c, d) = cd$.