

Devoir 2, à rendre pour la séance numéro 7, mercredi 3 novembre 2021

Exercice 1) Répartition linguistique

a) Si on se donne trois ensembles finis A , G et R , démontrer, à partir de la relation générale $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ valable pour des ensembles finis quelconques X et Y , que l'on a $|A \cap G \cap R| = |A \cup G \cup R| - |A| - |G| - |R| + |A \cap G| + |G \cap R| + |R \cap A|$.

Sur une population de 120 étudiants, 100 étudient l'anglais, le russe ou l'allemand, 65 l'anglais, 42 le russe, 45 l'allemand, 20 l'anglais et l'allemand, 25 l'anglais et le russe, 15 le russe et l'allemand.

- b) Combien étudient les trois langues ?
- c) Combien étudient l'anglais et l'allemand mais pas le russe ?
- d) Combien étudient l'anglais et le russe mais pas l'allemand ?
- e) Combien étudient l'allemand et le russe mais pas l'anglais ?
- f) Combien étudient l'anglais seulement ?
- g) Combien étudient l'allemand seulement ?
- h) Combien étudient le russe seulement ?
- i) Faire un diagramme de Venn global de cette population.

Exercice 2) Injection, surjection et bijection entre ensembles finis

On rappelle que si Z est un ensemble fini quelconque, on note $|Z|$ le nombre de ses éléments. On se donne deux ensembles finis X et Y et f une application de X dans Y . Comparer les cardinaux, en justifiant avec soin votre réponse, $|X|$ et $|Y|$ dans les trois cas suivants :

- a) f est injective
- b) f est surjective
- c) f est bijective.

Exercice 3) Dénombrements

- a) Combien de menus différents comportant une entrée, un plat et un dessert peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?
- b) Raymond Queneau a écrit en 1961 un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.
- c) À l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent et une de bronze. Avant la compétition, combien y-a-t-il de distributions possibles ?
- d) Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?