

Devoir 1

à rendre pour la séance numéro 4, le 20 février 2024

Exercice 1 - Calcul d'un carré

On travaille avec des nombres ordinaires.

On se donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer la matrice C donnée par l'expression $C = A^2 + 2AB + B^2$.
- Que vaut la matrice $A + B$?
- Calculer la matrice $D = (A + B)^2$.
- Que constate-t-on ?
- Quelle relation permet de calculer $(A + B)^2$ sans erreur et en toute généralité ?

Exercice 2 - Quelques produits de matrices

On travaille avec des nombres ordinaires. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer la matrice B^t , transposée de la matrice B .
- Que vaut le produit $C = B^t A$?
- Que vaut le produit $D = A B^t$?
- Pourquoi les deux matrices C et D ne peuvent pas être égales ?

Exercice 3 - Canal non symétrique

On se donne deux nombres p_0 et p_1 *a priori* différents et tous deux compris strictement entre 0 et 1. On introduit un canal bruité non symétrique tel que la probabilité de transition $0 \rightarrow 1$ est égale à p_0 et la probabilité de transition $1 \rightarrow 0$ est égale à p_1 .

- Quelle sont les probabilités de transition $0 \rightarrow 0$ et $1 \rightarrow 1$?
- On suppose que la modification de deux chiffres quelconques constitue un ensemble formé de deux événements indépendants. Quelles sont les probabilités de transition $00 \rightarrow 00$, $00 \rightarrow 01$, $00 \rightarrow 10$ et $00 \rightarrow 11$?
- Quelle est la somme des probabilités calculées à la question précédente ?
- On considère le mot $T = 110$ composé de trois bits. Quelle est la probabilité d'obtenir en sortie du canal un mot arbitraire composé de trois bits ? [il y a huit cas différents à envisager].
- Vérifier que la somme des huit probabilités précédentes est bien égale à 1.
- Proposer une valeur approchée des huit probabilités de la question d) si $p_0 = 10^{-2}$ et $p_1 = 10^{-4}$.