le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours de “Codes et Automates” **(MVA004)**

Examen du 17 juin 2020 (2 heures 45 minutes)

Cette épreuve se déroule en temps limité, à distance et sans surveillance particulière. Merci de bien respecter la durée de 2 heures et 45 minutes. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1) Code de Hamming

On rappelle que $\mathbb{F}_2 = \{0,\, 1\}$ et que le code de Hamming est un code linéaire qui transforme un mot $a \in (\mathbb{F}_2)^4$ en un message $u \in (\mathbb{F}_2)^7$ en lui adjoignant trois bits de contrôle avec un algorithme qui a été détaillé en cours. On envoie le message u dans un canal de transmission et on reçoit le mot $v \in (\mathbb{F}_2)^7$. On suppose que le canal de transmission $u \longrightarrow v$ est symétrique et sans mémoire. Cette propriété entraîne que la défaillance ou non de deux bits différents constituent des événements indépendants. La probabilité d'erreur pour la transmission d'un bit est égale à p avec $0 < p < 1$.

a) On se donne un entier k avec $0 \leq k \leq 7$. Quelle est la probabilité P_k pour que le mot reçu v diffère du mot envoyé u de k bits exactement ?

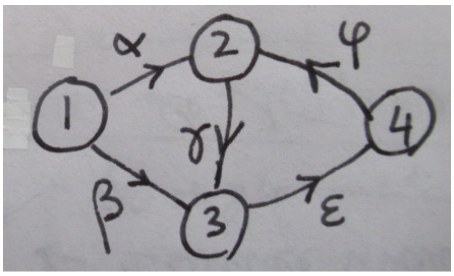
b) Quel est l'ordre de grandeur des huit probabilités précédentes si $p = 10^{-2}$?

c) Combien d'erreurs le code de Hamming peut-il corriger sans ambiguité ? Justifiez avec soin votre réponse.

d) Le code de Hamming est-il un code parfait ? Justifiez avec soin votre réponse.

e) Quelle est la probabilité de fausse correction si on modifie un éventuel bit défaillant lorsque $p = 10^{-2}$?

Exercice 2) Graphe



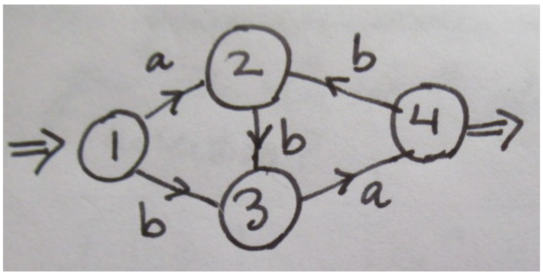
On considère le graphe décrit à la figure ci-dessus. On note X l'ensemble de ses sommets et E l'ensemble de ses arêtes.

a) Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble X des sommets ?

b) Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble des arêtes E ?

c) Préciser l'application $\delta : E \longmapsto X \times X$ qui à chaque arête $a \in E$, associe le couple $\delta(a) = (s, s')$ formé du sommet initial s de l'arête a et du sommet final s' de cette même arête.
d) Que vaut la matrice d'incidence J^+ de ce graphe orienté ?
e) Que vaut la matrice d'incidence J^- de ce graphe orienté ?
f) Que vaut la matrice d'adjacence M de ce graphe orienté ?
g) Vérifier qu'une relation algébrique entre J^+, J^- et M que l'on précisera est effectivement satisfaite.

Exercice 3) Langage d'un automate fini



On considère l'automate fini $\mathcal{A}$ sur l'alphabet $\{a, b\}$ décrit grâce à la figure ci-dessus. L'état "1" est le seul état initial et l'état "4" l'unique état final.
a) Cet automate est-il déterministe ? Justifier avec soin votre réponse.
b) Donner la liste des mots de longueur inférieure ou égale à 6 reconnus par l'automate.
c) Quelles sont les équations de départ de cet automate ?
d) Résoudre ce système d'équations.
e) Proposer une expression pour le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ des mots acceptés par l'automate $\mathcal{A}$.
f) Les mots de longueur inférieure ou égale à 6 du langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ sont-ils ceux trouvés à la seconde question ? Justifier avec soin votre réponse.

Exercice 4) Construction d'un automate fini

On se donne l'alphabet de deux lettres $A = \{a, b\}$. On pose $L = (a\, b^*\, a)^*$.

a) Quels sont les mots de longueur inférieure ou égale à 5 qui appartienent au langage L ?

b) Quel est le quotient à gauche $X_1 = a^{-1} L$?

c) Quel est le quotient à gauche $X_2 = b^{-1} L$?

d) Donner la liste de tous les quotients à gauche du langage L.

e) Construire l'automate $\mathcal{A} = (Q, A, T, I, F)$ dont le langage des mots acceptés $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est égal à L.

f) Quels est l'ensemble I des états initiaux et l'ensemble F des états finals ?