le cnam

MVA004 - Codes et Automates

Examen première session, 26 juin 2019

Enseignant responsable :
François Dubois

Durée 3 heures

Les calculatrices sont interdites

Documents autorisés :
notes de cours personnelles
et transmises lors des cours,
sous forme papier
et à l'exclusion de tout autre document.

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.

le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours de "Codes et Automates" **(MVA004)**

Examen du 26 juin 2019 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les deux exercices sont indépendants et donneront lieu à un barème équilibré.

Exercice 1 - Etude d'un code linéaire

On code une suite de trois bits $b_1b_2b_3$ en lui adjoignant trois bits de contrôle $a_1a_2a_3$ de la manière suivante : $a_1 = b_2 + b_3$, $a_2 = b_3 + b_1$ et $a_3 = b_1 + b_2$. De cette façon, on envoie un mot du code de la forme $c = b_1b_2b_3a_1a_2a_3$ dans un canal de transmission.

a) Quelle est la dimension et quelle est la longueur de ce code ?

b) Vérifier que ce code est linéaire et écrire sa matrice génératrice G.

c) Que valent la matrice de parité P et la transposée H^{t} de la matrice de contrôle ?

d) Etablir la liste des mots de code.

e) Déterminer la distance minimale du code.

f) Ce code est-il parfait?

g) Combien d'erreurs peuvent être détectées ? Combien d'erreurs peuvent être corrigées ?

h) Pour ε_j vecteur de base de la forme $\varepsilon_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ dans un espace de dimension 6, déterminer le syndrome $s(\varepsilon_j)$.

i) On reçoit le messages $m = 110010$. Quel est le syndrome de ce message ?

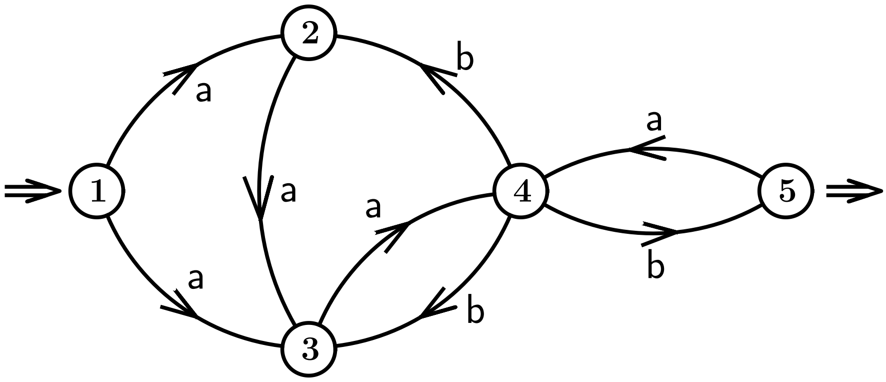
On suppose que le canal de transmission est symétrique et sans mémoire ; on note p $(0 < p < 1)$ la probabilité qu'un bit soit mal transmis.

j) Pour chacun des mots de code, notés c, déterminer le vecteur d'erreur $\gamma = m + c$.

k) En déduire le mot de code c_1 tel que l'erreur $m + c_1$ soit la plus probable.

l) Si $p = 0.01$, quel est l'ordre de grandeur de la probabilité de se tromper en effectuant la correction proposée à la question k) ?

Exercice 2 - Etude d'un automate non déterministe



On considère l'automate fini $\mathcal{A}$ sur l'alphabet $\{a,\, b\}$ décrit grâce à la figure ci-dessus. L'état "1" est le seul état d'entrée et l'état "5" l'unique état final.

a) Donner la liste des mots reconnus par l'automate de longueur inférieure ou égale à 5.

b) On note Y_k le langage des mots qui pilotent un chemin de $\mathcal{A}$ qui permet d'allet de l'état initial "1" à l'état courant "k". Quelles sont les équations de l'arrivée de l'automate ?

c) Démontrer que $Y_3 = Y_2 + Y_2\, a$.

d) En éliminant dans cet ordre (par exemple) les inconnues $Y_1,\ Y_2,\ Y_3$ puis Y_5, proposer une expression de Y_4 en fonction des lettres de l'alphabet et des opérations usuelles de réunion, de concaténation et de l'étoile.

e) En déduire une expression du langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ des mots acceptés par l'automate $\mathcal{A}$.

f) Quelles sont les équations de départ de cet automate ?

g) Résoudre ce système d'équations et proposer une (nouvelle ?) expression pour le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ des mots acceptés par l'automate $\mathcal{A}$.

On se propose de déterminer tous les langages quotients à gauche du langage $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$, c'est à dire tous les langages de la forme $w^{-1}L = \{u \in A^*,\, \exists\, v \in L, v = w\, u\}$ pour tous les mots $w \in A^*$.

h) Démontrer que $a^{-1}L = X_2 + X_3$ et $b^{-1}L = \emptyset$.

i) Démontrer que $a^{-1}(X_2 + X_3) = X_3 + X_4$ et $b^{-1}(X_2 + X_3) = \emptyset$.

j) Démontrer que $a^{-1}(X_3 + X_4) = X_4$ et $b^{-1}(X_3 + X_4) = X_2 + X_3 + X_5$.

k) Démontrer que $a^{-1}(X_4) = \emptyset$ et $b^{-1}X_4 = X_2 + X_3 + X_5$.

l) Démontrer que $a^{-1}(X_2 + X_3 + X_5) = X_3 + X_4$ et $b^{-1}(X_2 + X_3 + X_5) = \emptyset$.

m) Combien le langage L a-t-il *a priori* de quotients à gauche ?

n) Vérifier, en utilisant des mots de petite longueur, que ces quotients sont tous différents.

o) Construire le graphe d'un automate qui déterminise l'automate initial $\mathcal{A}$.

p) Quel(s) est(sont) l'(les) état(s) final(s) de l'automate déterministe trouvé à la question o) ?

François Dubois, 26 juin 2019.