le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours de "Codes et Automates" **(MVA004)**

Examen du 02 septembre 2020 (de 17h30 à 20h30)

Cette épreuve se déroule en temps limité, à distance et sans surveillance particulière. Un délai de 30 minutes est accordé à la fin de l'épreuve pour transférer les données sur l'interface informatique. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1) Code linéaire

On rappelle que $\mathbb{F}_2 = \{0,\, 1\}$. On se donne un code linéaire qui transforme un mot $a \in (\mathbb{F}_2)^3$ en un message $u \in (\mathbb{F}_2)^7$ en lui adjoignant quatre bits de contrôle avec l'algorithme suivant : si $a = (\alpha,\, \beta,\, \gamma)$, $u = (\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \alpha + \beta + \gamma)$. On envoie le message u dans un canal de transmission et on reçoit le mot $v \in (\mathbb{F}_2)^7$. On suppose que le canal de transmission $u \longrightarrow v$ est symétrique et sans mémoire. Cette propriété entraîne que la défaillance ou non de deux bits différents constituent des événements indépendants. La probabilité d'erreur pour la transmission d'un bit est égale à p avec $0 < p < 1$.

a) On se donne un entier k avec $0 \leq k \leq 7$. Quelle est la probabilité P_k pour que le mot reçu v diffère du mot envoyé u de k bits exactement ?

b) Quel est l'ordre de grandeur des huit probabilités précédentes si $p = 10^{-1}$?

c) Quelle est la dimension et quelle est la longueur de ce code ?

d) Quelle est la matrice génératrice G de ce code ?

e) Que valent la matrice de parité P et la transposée H^{t} de la matrice de contrôle ?

f) Etablir la liste des mots de code.

g) Déterminer la distance minimale du code.

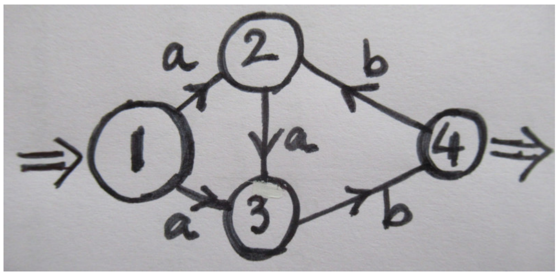
h) Ce code est-il parfait ? Justifiez avec soin votre réponse.

i) Combien d'erreurs peuvent être détectées ?

j) Combien d'erreurs peuvent être corrigées ?

k) On reçoit le message $m = 1100011$. Quel est le syndrome de ce message ?

Exercice 2) Langage d'un automate fini



On considère l'automate fini $\mathcal{A}$ sur l'alphabet $\{a,\, b\}$ décrit grâce à la figure ci-dessus. L'état "1" est le seul état initial et l'état "4" l'unique état final.

a) Cet automate est-il déterministe ? Justifier avec soin votre réponse.

b) Donner la liste des mots de longueur inférieure ou égale à 6 reconnus par l'automate.

c) Quelles sont les équations de départ de cet automate ?

d) Résoudre ce système d'équations.

e) Proposer une expression pour le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ des mots acceptés par l'automate $\mathcal{A}$.

f) Les mots de longueur inférieure ou égale à 6 du langage $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ sont-ils ceux trouvés à la seconde question ? Justifier avec soin votre réponse.

Exercice 3) Construction d'un automate fini

On se donne l'alphabet de deux lettres $A = \{a,\, b\}$. On pose $L = a\,(abb)^*\,ab$.

a) Quels sont les mots de longueur inférieure ou égale à 6 qui appartiennent au langage L ?

b) Quel est le quotient à gauche $X_1 = a^{-1}L$?

c) Quel est le quotient à gauche $X_2 = b^{-1}L$?

d) Quel est le quotient à gauche $X_3 = a^{-1}X_1$?

e) Quel est le quotient à gauche $X_4 = b^{-1}X_1$?

f) Quel est le quotient à gauche $X_5 = a^{-1}X_3$?

g) Quel est le quotient à gauche $X_6 = b^{-1}X_3$?

h) Donner la liste de tous les quotients à gauche du langage L.

i) Combien de quotients à gauche au total trouve-t-on pour le langage L ?

j) Construire l'automate $\mathcal{A} = (Q,\, A,\, T,\, I,\, F)$ dont le langage des mots acceptés $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ est égal à L.

k) Quels est l'ensemble I des états initiaux et l'ensemble F des états finals ?