

le **cnam**

Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

Cours 01

Géométrie différentielle (i)

Préliminaires algébriques

Intégration par parties

Aire d'un morceau de surface

Gradient surfacique

François Dubois

octobre 2005, 28 pages

CVM ①

Champs de Vecteurs et Maillage

ch ① géométrie différentielle. Cours du 5 oct 05.

① Préliminaires algébriques.

• on ne résume pas l'algèbre linéaire en quelques pages. Ce rappel suppose connu du lecteur la notion de matrice, sous la forme pratique d'un tableau de nombres $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ (pour les matrices carrées), où i désigne l'indice de la ligne et j celui de la colonne. Une matrice permet également de décrire un opérateur linéaire encore noté A au sein d'un espace E de dimension n . Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ désigne une base de cet espace E , l'image du point (ou du vecteur!) $x \in E$, qui se décompose dans la base (e_i) sous la forme

$$(1.1) \quad x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

est le vecteur (ou le point!) $y = A \cdot x$ dont la i° coordonnée y_i , avec $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ s'écrit

$$(1.2) \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq n, \quad x \text{ donné en (1.1)}.$$

• Rappelons que l'image $A \cdot e_j$ du vecteur de la base est le vecteur dont la i° -coordonnée vaut simplement (a_{ij}) :

$$(1.3) \quad A \cdot e_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$$

On lit donc l'image du j^{e} vecteur de base dans les j^{e} colonne du tableau $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.
 Il est commode d'introduire le symbole δ_{ij} de Kronecker:

$$(1.4) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

La matrice I d'élément générique δ_{ij} est appelée matrice identité

- l'inverse (quand il existe!) de la matrice $A = (a_{ij})$ est la matrice B d'élément générique b_{jk} de sorte que

$$(1.5) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik}, \quad 1 \leq i, k \leq n$$

De façon générale, l'expression $\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ désigne l'élément (i, k) (i^{e} ligne et k^{e} colonne) de la matrice $A \cdot B$:

$$(1.6) \quad (A \cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \quad 1 \leq i, k \leq n$$

La relation (1.5) peut aussi s'écrire de façon matricielle:

$$(1.7) \quad A \cdot B = I.$$

On dit que B est l'inverse de la matrice A .

- Nous supposons dans la suite que l'espace usuel \mathbb{R}^3 est euclidien, c'est à dire muni d'un produit scalaire noté (\cdot, \cdot) ou plus simplement avec un point. de produit scalaire $x \cdot y \equiv (x, y)$ des vecteurs x et y de \mathbb{R}^3 (pour le moment !) est un nombre réel, qui dépend linéairement de x et linéairement de y [on dit que $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (x, y) \mapsto (x \cdot y) \in \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire] :

$$(1.8) \quad (\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha (x \cdot z) + \beta (y \cdot z)$$

$$(1.9) \quad x \cdot (\alpha y + \beta z) = \alpha (x \cdot y) + \beta (x \cdot z)$$

De plus, cette forme est symétrique :

$$(1.10) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

elle est positive

$$(1.11) \quad x \cdot x \geq 0, \quad \forall x$$

et elle est définie :

$$(1.12) \quad x \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

la distance $d(x, y)$ entre les points $x, y \in \mathbb{R}^3$ s'exprime facilement à l'aide du produit scalaire :

$$(1.13) \quad d(x, y) = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}$$

on note aussi $|x|$ le module (ou la norme, mais pour l'espace euclidien courant, nous préférons ici la simple norme) du vecteur x :

$$(1.14) \quad |x| = \sqrt{x \cdot x} ;$$

c'est la distance de l'origine au point x .

- A l'aide d'une base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq 3}$ de l'espace \mathbb{R}^3 , c'est à dire telle que

$$(1.15) \quad e_i \cdot e_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

[si $j \neq i$, on lit dans (1.15) que les deux vecteurs e_i et e_j sont orthogonaux et si $j = i$, (1.15) exprime que le vecteur e_i est de "longueur" unité], le calcul du produit scalaire $x \cdot y$ (avec x donné en (1.1) et y par $\sum_j y_j e_j$) est facile. on a (exercice!)

$$(1.16) \quad x \cdot y = \sum_{j=1}^3 x_j y_j .$$

- Toujours dans l'espace euclidien usuel (\mathbb{R}^3), le produit vectoriel $x \times y$ est un vecteur qui dépend linéairement de x , linéairement de y , et dont les coordonnées $(x \times y)_i$ dans une base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq 3}$ s'expriment au moyen du tenseur complètement antisymétrique ϵ_{ijk} .

le tenseur ε_{ijk} est défini pour $1 \leq i, j, k \leq 3$; 1-5
 on a donc 27 triplets distincts à priori à consi-
 dérer. Si (i, j, k) n'est pas une permutation de
 $(1, 2, 3)$ [c'est-à-dire si deux des indices au moins sont é-
 gaux], on a simplement $\varepsilon_{ijk} = 0$

(1.17) $\varepsilon_{ijk} = 0$, deux au moins des indices égaux.
 Dans les six cas restants, ε_{ijk} vaut +1 si
 (i, j, k) est une permutation paire de $(1, 2, 3)$, i.e.
 $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ ou $(2, 3, 1)$ ou $(3, 1, 2)$

(1.18) $\varepsilon_{ijk} = +1$, (i, j, k) permutation paire de $(1, 2, 3)$
 et ε_{ijk} vaut -1 si (i, j, k) est une permutation
impaire de $(1, 2, 3)$, c'est-à-dire pour $(i, j, k) = (1, 3, 2)$,
 $(3, 2, 1)$ ou $(2, 1, 3)$.

(1.19) $\varepsilon_{ijk} = -1$, (i, j, k) permutation impaire de $(1, 2, 3)$

• On a donc

$$(1.20) \quad (x \times y)_i = \sum_{j, k} \varepsilon_{ijk} x_j y_k, \quad 1 \leq i \leq 3$$

et le plus souvent, on ne note pas le Σ au mem-
 bre de droite de la relation (1.20), la règle de
 sommation sur les indices répétés rendant
 ce symbole implicite (convention d'Einstein).
 Il y a une règle de calcul sur le tenseur
 complètement antisymétrique qu'il est bon
 de connaître.

Prop. ① Contractation du tenseur antisymétrique.

$$(1.21) \quad \sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} \quad 1 \leq i, j, p, q \leq 3$$

on note la structure des deux membres de la relation (1.21): l'indice de sommation k est en 3^o position pour les deux tenseurs ε ; il pourrait aussi être en première ou en seconde position; ce qui compte est qu'il soit dans la même position pour les deux tenseurs. Pour le membre de droite, on forme d'abord un produit de symboles de Kronecker avec les indices venant en premier (i et p) et avec les indices venant en second (j et q). Puis on forme un produit analogue (mais précédé du signe "-") avec le premier indice joint au second (i et q d'une part, j et p d'autre part)

Preuve de la proposition ①

- Si $i=j$ ou $p=q$, alors $\varepsilon_{ijk} = 0 \quad \forall k$ et $\varepsilon_{pqk} = 0 \quad \forall k$. qu'en est-il du membre de droite?

On voit que $\delta_{ip} \delta_{jq}$ est non nul pour $i=p$ et $j=q$,

que $\delta_{iq} \delta_{jp}$ est $\neq 0$ pour $i=q$ et $j=p$. Donc

$$\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} = 1 - 1 = 0 \quad \text{si } i=j=p=q$$

$$\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} = 0 - 0 = 0 \quad \text{si } i=j \neq p$$

ou $i=j \neq q$. Dans les deux cas, l'expression $\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$ est nulle et l'identité (1.21) est vérifiée dans ce premier cas.

- Si $i \neq j$, on se place dans le cas $i=1$ et $j=2$ pour fixer les idées et les autres cas s'obtiennent à partir de ce cas particulier par permutation des indices. Alors seul le terme ϵ_{123} est non nul parmi tous les ϵ_{ijk} ($k \in \{1,2,3\}$) au membre de gauche de (1.21); la somme correspondante vaut donc simplement $\epsilon_{123} \epsilon_{pq3}$.

Si $p \neq 1$ ou $p \neq 2$ ou bien si $q \neq 1$ ou $q \neq 2$, le produit $\epsilon_{123} \epsilon_{pq3}$ est nul. C'est aussi le cas de

$$\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} = \delta_{1p} \delta_{2q} - \delta_{1q} \delta_{2p},$$

ce qui établit la relation (1.21) dans ce nouveau cas.

- * Si p et q appartiennent tous deux à l'ensemble $\{1,2\}$ mais sont égaux [à 1 pour fixer les idées, l'autre cas est analogue!], alors $\epsilon_{113} = 0$ d'une part et $\delta_{11} \delta_{21} - \delta_{11} \delta_{21} = 0 - 0 = 0$ d'autre part.

- * Si $p=1$ et $q=2$, alors $\epsilon_{123} \epsilon_{123} = 1$ et $\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21} = 1 - 0 = 1$ et la relation (1.21) est satisfaite. Si $p=2$ et $q=1$, alors $\epsilon_{123} \epsilon_{213} = -1$. Par ailleurs $\delta_{12} \delta_{21} - \delta_{11} \delta_{22} = -1$, ce qui montre complètement la propriété. \square

② Intégration par parties

- Nous donnons dans ce paragraphe une relation très générale qui généralise l'intégration par parties bien connue sur un intervalle :

$$(2.1) \int_a^b f'(t)g(t) dt = - \int_a^b f(t)g'(t) dt + [f(t)g(t)]_a^b$$

Nous l'exprimons dans l'espace \mathbb{R}^n , la valeur de n usuelle étant ensuite de 1, 2 ou 3. On se donne un domaine borné $\widehat{\Omega}$ de \mathbb{R}^n (un volume dans \mathbb{R}^3 , un morceau de plan dans \mathbb{R}^2 , un intervalle typiquement dans \mathbb{R}) et on note $\widehat{\Gamma} = \partial\widehat{\Omega}$ la frontière (le bord) de cet ensemble. C'est un morceau de surface (fermée !) si $n=3$, une courbe si $n=2$, un ensemble de deux points si $n=1$ et $\widehat{\Omega}$ est un intervalle. Nous supposons aussi que

$\widehat{\Omega}$ est d'un seul côté de son bord, que celui-ci est assez régulier pour définir en tout point $\hat{x} \in \widehat{\Gamma}$ une normale $\hat{n}(\hat{x})$ extérieure.

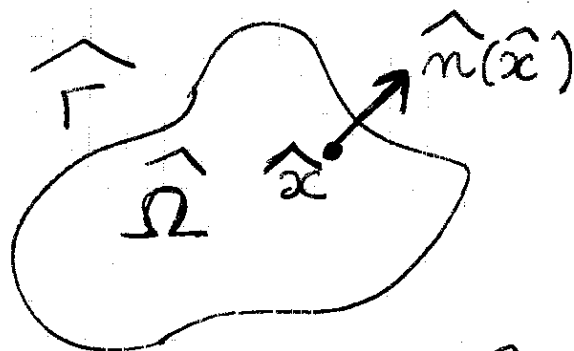
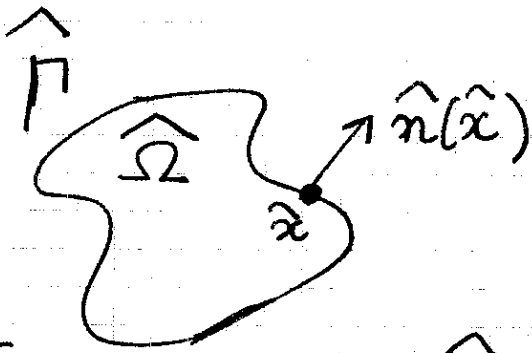
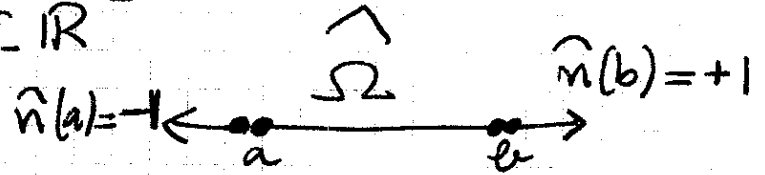


Figure 1. Domaine $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$

revient au domaine $\widehat{\Omega}$ (voir les figures 1 à 3).

Ainsi pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$(2.2) \quad \hat{x} - \varepsilon \hat{n}(\hat{x}) \in \widehat{\Omega}, \quad \hat{x} \in \widehat{\Gamma}, \quad \varepsilon > 0$$

Figure 2. Domaine $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ Figure 3. Domaine $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}$

or le point $\hat{x} - \varepsilon \hat{n}(\hat{x})$ appartient au domaine $\hat{\Omega}$, alors que

$$(2.3) \quad \hat{x} + \varepsilon \hat{n}(\hat{x}) \notin \hat{\Omega}, \quad \hat{x} \in \hat{\Gamma}, \quad \varepsilon > 0$$

or le point $\hat{x} + \varepsilon \hat{n}(\hat{x})$ est extérieur au domaine d'étude $\hat{\Omega}$.

- Dans le domaine $\hat{\Omega}$, nous savons calculer des intégrales, pour des fonctions $\hat{\Omega} \ni \hat{x} \mapsto \hat{u}(\hat{x}) \in \mathbb{R}$ réelles pour fixer les idées

$$(2.4) \quad \int_{\hat{\Omega}} \hat{u}(\hat{x}) d\hat{x} \in \mathbb{R} \text{ si } \hat{u}(\hat{x}) \in \mathbb{R}.$$

Sur la frontière $\hat{\Gamma}$ de $\hat{\Omega}$, nous savons également calculer des intégrales. Nous le détaillons par exemple lorsque $n=2$. Alors $\hat{\Omega}$ est un morceau du plan \mathbb{R}^2 (Figure 2) et $\hat{\Gamma}$ est une courbe du plan \mathbb{R}^2 . Si $\hat{\Gamma} \ni \hat{x} \mapsto \hat{v}(\hat{x}) \in \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie sur la courbe $\hat{\Gamma}$,

On sait que l'intégrale $\int_{\hat{\Gamma}} \hat{v}(\hat{x}) d\hat{s}$ se calcule en paramétrisant la courbe $\hat{\Gamma}$ par l'abscisse curviligne \hat{s} . L'abscisse curviligne \hat{s} est l'élément de longueur infinitésimal le long de $\hat{\Gamma}$. On a en particulier pour $\hat{v}(\hat{x}) \equiv 1$,

$$(2.5) \quad \int_{\hat{\Gamma}} d\hat{s} = |\hat{\Gamma}|, \text{ longueur de la courbe } \hat{\Gamma}.$$

• D'un point de vue pratique, la détermination de l'abscisse curviligne s'obtient à partir d'un paramétrage $[0,1] \ni \theta \mapsto \hat{\gamma}(\theta) \in \hat{\Gamma}$ des points de $\hat{\Gamma}$ en le dérivant :

$$(2.6) \quad d\hat{s}(\theta) = \sqrt{\left(\frac{d\hat{x}_1}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\hat{x}_2}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

si $\hat{\gamma}(\theta) = (\hat{x}_1(\theta), \hat{x}_2(\theta))$ est le point courant de la courbe $\hat{\Gamma}$. L'intégrale $\int_{\hat{\Gamma}} \hat{v}(\hat{x}) d\hat{s}$ se calcule à l'aide d'une intégrale usuelle entre 0 et 1 :

$$(2.7) \quad \int_{\hat{\Gamma}} \hat{v}(\hat{x}) d\hat{s} = \int_0^1 \hat{v}(\hat{\gamma}(\theta)) \frac{d\hat{s}}{d\theta} d\theta$$

où $\frac{d\hat{s}}{d\theta}$ s'obtient naturellement à partir de la relation (2.6). Nous invitons le lecteur, à partir du paramétrage $[0,1] \ni \theta \mapsto (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)) \in \mathbb{R}^2$ à retrouver la longueur du cercle unité à l'aide de (2.7) et (2.5)!

• Pour un point \hat{x} de la courbe $\hat{\Gamma}$ du plan \mathbb{R}^2 , nous introduisons le vecteur tangent unitaire

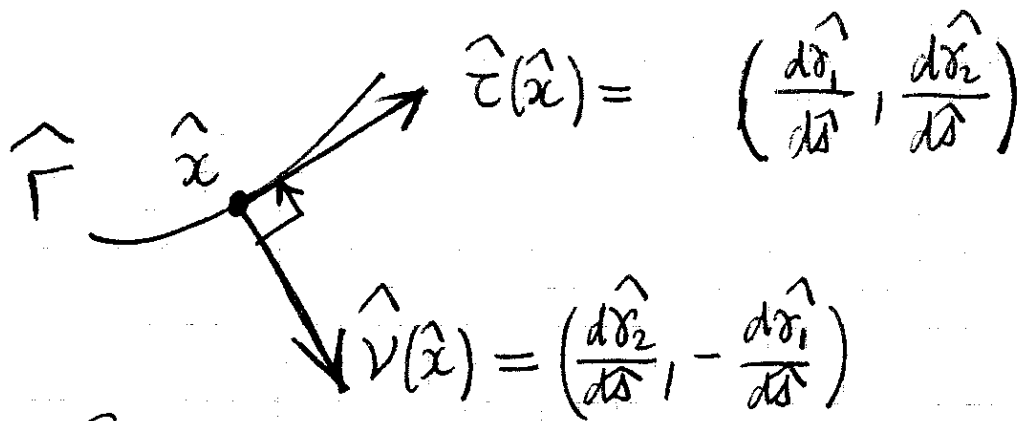


Figure 4 Zoom autour d'un point courant \hat{x} à la courbe $\hat{\Gamma}$ du plan \mathbb{R}^2

$\hat{\tau}(\hat{x})$ par la relation

$$(2.8) \quad \hat{\tau}(\hat{x}) = \left(\frac{d\hat{\sigma}_1}{d\hat{\sigma}}, \frac{d\hat{\sigma}_2}{d\hat{\sigma}} \right) \equiv (\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2)$$

et le vecteur normal extérieur $\hat{\nu}(\hat{x})$ (petit changement de notation, avec la lettre ν au lieu de la lettre n ; utile plus loin!) de sorte que $\hat{\tau}$ soit issu de $\hat{\nu}$ par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ (Figure 4):

$$(2.9) \quad \hat{\nu}(\hat{x}) = (\hat{\tau}_2(\hat{x}), -\hat{\tau}_1(\hat{x})), \quad \hat{x} \in \hat{\Gamma}$$

- Le vecteur $\hat{\tau}$ défini à la relation (2.8) est naturellement unitaire. On a en effet

$$\begin{aligned} (\hat{\tau}_1)^2 + (\hat{\tau}_2)^2 &= \left(\frac{d\hat{\sigma}_1}{d\hat{\sigma}} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{\sigma}_2}{d\hat{\sigma}} \right)^2 = \left[\left(\frac{d\hat{\sigma}_1}{d\hat{\sigma}} \right)^2 + \left(\frac{d\hat{\sigma}_2}{d\hat{\sigma}} \right)^2 \right] \left(\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{\sigma}} \right)^2 \\ &= 1 \text{ en vertu de la relation (2.6).} \end{aligned}$$

• Si, de retour au cas général, $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$, alors $\hat{\Gamma}$ est un morceau Σ de surface de l'espace \mathbb{R}^3 et le calcul de

$$(2.10) \int_{\Sigma} v(x) d\sigma \in \mathbb{R}, \quad \Sigma \ni x \mapsto v(x) \in \mathbb{R}$$

pour une fonction réelle $v(x)$ sera explicité plus loin. Nous retenons que dans tous les cas, nous savons calculer une intégrale

$$(2.11) \int_{\partial \hat{\Omega}} \hat{v}(\hat{x}) d\hat{\sigma}(\hat{x}) \in \mathbb{R}, \quad \hat{\Gamma} \ni \hat{x} \mapsto \hat{v}(\hat{x}) \in \mathbb{R}$$

pour une fonction \hat{v} définie sur le bord $\hat{\Gamma} = \partial \hat{\Omega}$ du domaine $\hat{\Omega}$.

• La propriété fondamentale du calcul différentiel et intégral s'exprime ainsi. Soit $\hat{\Omega} \ni \hat{x} \mapsto \hat{\varphi}(\hat{x}) \in \mathbb{R}$ une fonction scalaire régulière définie sur $\hat{\Omega}$ et i un indice compris entre 1 et n . on a :

$$(2.12) \int_{\hat{\Omega}} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_i} d\hat{x} = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{\varphi}(\hat{x}) \hat{n}_i(\hat{x}) d\hat{\sigma}(\hat{x})$$

où \hat{n}_i est la i° composante de la normale extérieure au domaine $\hat{\Omega}$ au point $\hat{x} \in \partial \hat{\Omega}$.

- On peut illustrer (2.12) en prenant $n=1$. Alors $i=1$ et si $\hat{\Omega} =]a, b[$ avec $a < b$, on a $\hat{\Gamma} = \partial\hat{\Omega} = \{a, b\}$, parti composé des deux points a et b . on a $\hat{n}(a) = -1$ et $\hat{n}(b) = +1$ (Figure 3) et la relation (2.12) s'écrit

$$(2.13) \quad \int_a^b \frac{d\hat{\varphi}}{d\hat{x}} d\hat{x} = -\hat{\varphi}(a) + \hat{\varphi}(b),$$

relation qui exprime exactement (2.1) pour $\hat{\varphi} = fg$.

- Si $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, alors $\hat{\Gamma}$ est une courbe du plan et $d\hat{\sigma} = d\hat{s}$, abscisse curviligne sur la courbe. On note $\hat{\nu}$ (au lieu de \hat{n}) la normale extérieure au domaine $\hat{\Omega}$ en un point $\hat{x} \in \hat{\Gamma}$ de la courbe (Figure 4). On utilise la relation (2.12) pour les deux composantes $\hat{\varphi} = \hat{\xi}_1$ et $\hat{\varphi} = \hat{\xi}_2$ d'un champ de vecteurs $\hat{\Omega} \ni \hat{x} \mapsto \hat{\xi}(\hat{x}) \in \mathbb{R}^2$ défini sur $\hat{\Omega}$. On a alors d'une part avec $i=1$:

$$\int_{\hat{\Omega}} \frac{\partial \hat{\xi}_1}{\partial \hat{x}_1} d\hat{x} = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{\xi}_1(\hat{x}) \hat{\nu}_1(\hat{x}) d\hat{s}(\hat{x})$$

et d'autre part avec $i=2$:

$$\int_{\hat{\Omega}} \frac{\partial \hat{\xi}_2}{\partial \hat{x}_2} d\hat{x} = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{\xi}_2(\hat{x}) \hat{\nu}_2(\hat{x}) d\hat{s}(\hat{x})$$

Quand on somme le membre de gauche des deux égalités précédentes, on fait apparaître la divergence du champ de vecteurs $\hat{\xi}$:

$$(2.14) \quad \operatorname{div} \hat{\xi} = \frac{\partial \hat{\xi}_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial \hat{\xi}_2}{\partial \hat{x}_2}$$

alors que le membre de droite permet d'expliciter le produit scalaire $\hat{\xi} \cdot \hat{\nu}$ du champ de vecteurs $\hat{\xi}$ avec la normale extérieure $\hat{\nu}$. On a donc déduit de (2.12)

$$(2.15) \quad \int_{\hat{\Omega}} \operatorname{div} \hat{\xi} \, dx = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{\xi} \cdot \hat{\nu} \, d\hat{s}, \quad \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$$

- Bien entendu, le raisonnement précédent est encore vrai dans le cas $n=3$ où $\hat{\Omega}$ est un volume de \mathbb{R}^3 . On note alors $\partial \hat{\Omega}$ sous la forme Σ et on enlève les "chapeaux" aux variables:

$$(2.16) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \xi \, dx = \int_{\Sigma} \xi \cdot n \, d\text{ot}(x).$$

Seules les notations ont subi une petite variante. L'intégration par parties reste la même!

- Dans le cas où $n=3$, Ω est un volume de l'espace et $\Sigma = \partial \Omega$ sa frontière, une surface fermée. On considère toujours un champ de vecteurs $\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto \xi(x) \in \mathbb{R}^3$ défini sur Ω et on introduit le rotationnel par ses coordonnées dans une base orthonormée:

$$(2.17) \quad (\text{rot } \vec{E})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j \vec{E}_k$$

où $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$. On a alors la

Prop (2) Intégrale d'un rotationnel

$$(2.17) \quad \int_{\Omega} \text{rot } \vec{E} \, dx = \int_{\Sigma} n \times \vec{E} \, d\sigma.$$

Preuve de la proposition 2.

Il suffit d'utiliser la relation (2.12) pour $\varphi = \vec{E}_k$ la k^{e} composante du champ de vecteurs, de prendre une dérivée selon le j^{e} indice. Il vient:

$$\int_{\Omega} \partial_j \vec{E}_k \, dx = \int_{\Sigma} n_j \vec{E}_k \, d\sigma.$$

Puis on somme sur j et k après multiplication par ϵ_{ijk} vu au premier paragraphe de cette première leçon. Le membre de gauche donne la i^{e} composante du rotationnel. Le membre de droite s'écrit $\int_{\Sigma} \epsilon_{ijk} n_j \vec{E}_k \, d\sigma$, soit $\int_{\Sigma} (n \times \vec{E})_i \, d\sigma$ compte tenu de la relation (1.20). La relation (2.17) est donc établie. \square

③ Aire d'un morceau de surface

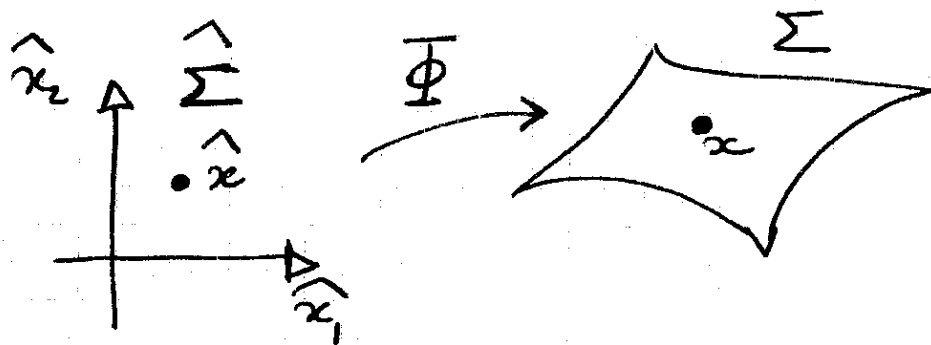


Figure 5 . Représentation d'un morceau de surface Σ par une carte locale Φ .

- Dans ce paragraphe nous étudions un petit morceau de surface. On le suppose paramétré par une fonction régulière $\Phi : [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$(3.1) \quad [0,1]^2 \ni \hat{x} \mapsto \Phi(\hat{x}) = x \in \Sigma \subset \mathbb{R}^3$$

ainsi qu'illustré à la figure 5. Le cas général d'une surface "complète" demande de "recoller" les "cartes locales" telles que l'application Φ de la relation (3.1). C'est utile, venant et indispensable pour élaborer une théorie globale des surfaces comme sous-variétés de \mathbb{R}^3 , mais pas indispensable pour ce cours.

- Nous étudions le cas le plus simple où la fonction Φ est affine. Il existe deux vecteurs ε_1 et ε_2 de \mathbb{R}^3 de sorte que

$$(3.2) \quad \phi(\hat{x}) = x_0 + \hat{x}_1 \varepsilon_1 + \hat{x}_2 \varepsilon_2, \quad \hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2). \quad \text{H7}$$

On suppose que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre, c'est à dire qu'aucun de ces deux vecteurs n'est nul et qu'on n'a pas une proportionnalité du genre $\varepsilon_2 = \lambda \varepsilon_1$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

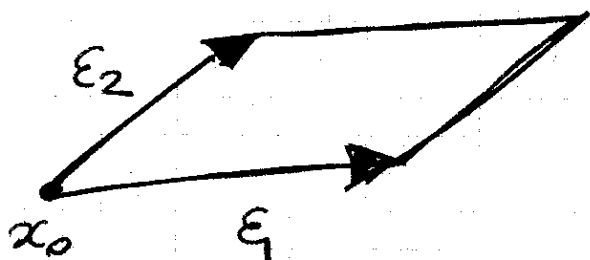


Figure 6 Parallelogramme plan engendré par ϕ affiné (relation (3.2)), avec $0 \leq \hat{x}_1, \hat{x}_2 \leq 1$.

- On sait qu'alors le produit vectoriel $\varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ est non nul et que le morceau de plan décrit par la relation (3.2) avec $0 \leq \hat{x}_1, \hat{x}_2 \leq 1$ a pour surface $|\varepsilon_1 \times \varepsilon_2|$, le module du produit vectoriel (Figure 6). Un petit morceau de surface plane représentée par une fonction ϕ affiné comme en (3.2) a une surface $d\sigma$ qui s'écrit

$$(3.3) \quad d\sigma = |\varepsilon_1 \times \varepsilon_2| d\hat{x}_1 d\hat{x}_2$$

pour un élément infinitésimal $d\hat{x} = d\hat{x}_1, d\hat{x}_2$ dans le plan "de départ" \mathbb{R}^2 .

• Dans le cas général, la relation (3.2) est appro- 1-18
chée. On suppose ϕ dérivable, on pose

$$(3.4) \quad \varepsilon_j = \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_j}, \quad 1 \leq j \leq 2$$

et on suppose que la famille $(\varepsilon_1(\hat{x}), \varepsilon_2(\hat{x}))$ est libre pour tout $\hat{x} \in \hat{\Sigma}$. Le couple de vecteurs dépend maintenant du point $\hat{x} \in \hat{\Sigma}$, donc de $x \in \Sigma$. Pour $x \in \Sigma$ donné, le plan contenant x et dirigé par $(\varepsilon_1(\hat{x}), \varepsilon_2(\hat{x}))$ est le plan tan-
gent à la surface Σ . On le note $x + T_x \Sigma$.

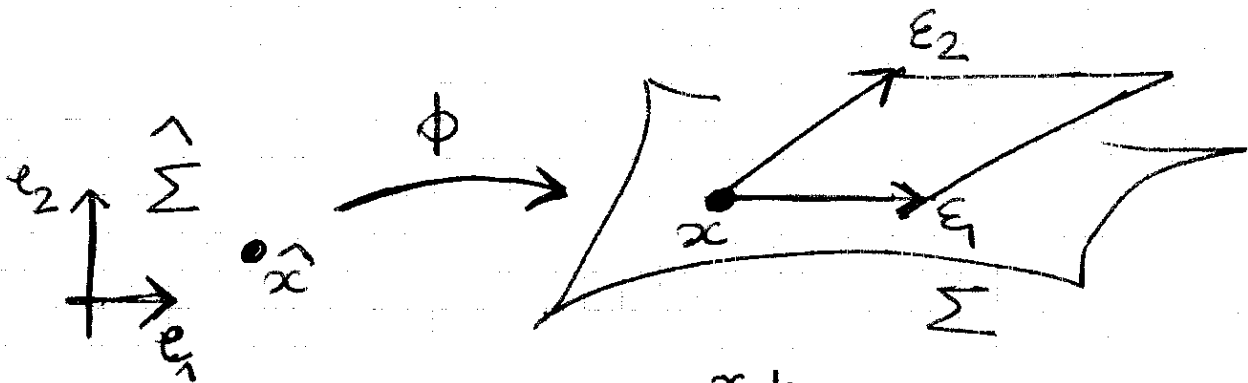


Figure 7. Plan tangent $x + T_x \Sigma$ au point x de la surface Σ .

L'élément d'aire élémentaire est toujours donné par la relation (3.3), mais maintenant ε_1 et ε_2 sont déterminés par (3.4) au lieu d'être constants dans le cas (3.2) d'un plan affine. On note qu'on peut écrire aussi

$$(3.5) \quad \varepsilon_j = d\phi(\hat{x}) \cdot e_j, \quad 1 \leq j \leq 2, \quad \hat{x} \in \hat{\Sigma}$$

où e_j est le vecteur de la base canonique du plan \mathbb{R}^2 où ϕ est définie. 1-19

- On peut calculer $|\xi \times \varepsilon_2|$ à l'aide de la matrice de Gram de la métrique locale. On pose

$$(3.6) \quad G_{ij} = \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j, \quad 1 \leq i, j \leq 2, \quad \hat{x} \in \hat{\Sigma}.$$

On définit ainsi une matrice deux par deux. On pose pour $\hat{x} \in \hat{\Sigma}$ et $x = \phi(\hat{x}) \in \Sigma$:

$$(3.7) \quad g(\hat{x}) = \det[G_{ij}(\hat{x})] \equiv |\varepsilon_1(\hat{x})|^2 |\varepsilon_2(\hat{x})|^2 - (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^2$$

on sait que $g(\hat{x})$ est non nul puisque les vecteurs ε_1 et ε_2 sont indépendants (le lecteur pourra revoir avec profit le "cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz"). On a alors

Prop (3) Métrique locale

$$(3.8) \quad |\xi \times \varepsilon_2|^2 = g(x), \quad x \in \Sigma.$$

Preuve de la proposition (3).

- On va utiliser des coordonnées cartésiennes. Mais en privilégiant la base. Comme ξ est non nul, on peut introduire un vecteur de base β_1 de l'espace \mathbb{R}^3 unitaire de sorte que $\xi = \alpha \beta_1$, avec $\alpha \neq 0$. De plus, la famille

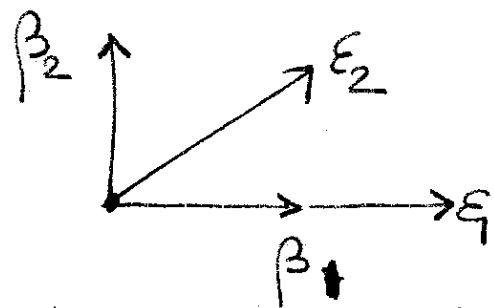


Figure 8. Base orthonormée de l'espace tangent $T_x \Sigma$

(ϵ_1, ϵ_2) est libre. Donc le plan $T_x \Sigma$ qui il engendre admet une base orthonormée (β_1, β_2) ayant β_1 comme premier vecteur de base (figure 8). On a alors $\epsilon_2 = \xi \beta_1 + \eta \beta_2$. On complète alors la base de l'espace \mathbb{R}^3 à l'aide du vecteur $\beta_3 = \beta_1 \times \beta_2$. On a donc la matrice G qui est donnée par

$$G = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha \xi \\ \alpha \xi & \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix}$$

son déterminant vaut clairement $g = \alpha^2 \eta^2$.

- Par ailleurs $\epsilon_1 \times \epsilon_2 = \alpha \beta_1 \times (\xi \beta_1 + \eta \beta_2) = \alpha \eta \beta_1 \times \beta_2 = \alpha \eta \beta_3$ et $|\epsilon_1 \times \epsilon_2| = |\alpha \eta|$. La relation (3.8) s'en déduit. \square

- Pour $\Sigma \ni x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}$ fonction scalaire définie sur la surface, on dispose donc de l'intégrale $\int_{\Sigma} \varphi(x) d\sigma(x)$. C'est une "simple" intégrale double définie à l'aide de la carte ϕ :

$$(3.9) \quad \int_{\Sigma} \varphi(x) \, d\sigma(x) = \int_{\hat{\Sigma}} \varphi(\phi(\hat{x})) \sqrt{g(\hat{x})} \, d\hat{x}.$$

Pour $\varphi(x) \equiv 1$, la relation (3.9) permet un calcul de l'aire de la surface Σ .

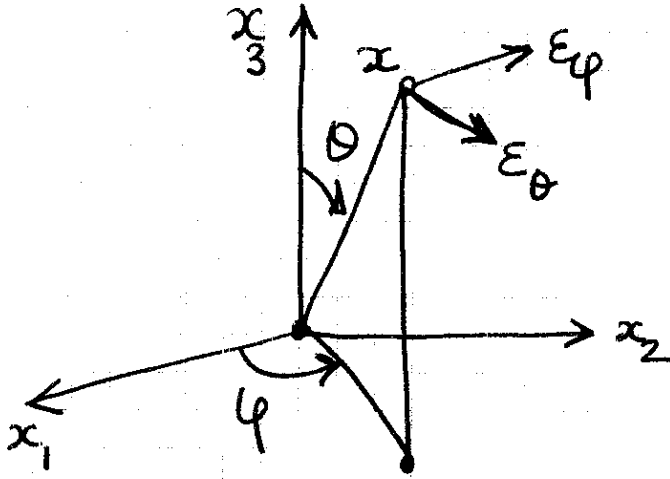


Figure 9 Coordonnées polaires dans \mathbb{R}^3 .

- Nous détaillons le cas de la sphère de rayon $\rho > 0$, ou au moins "presque toute" cette sphère. Nous introduisons les classiques coordonnées sphériques (figure 9):

$$(3.10) \quad \begin{cases} x_1 = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = \rho \cos \theta. \end{cases}$$

ou définit ainsi: $[0, \pi] \times [-\pi, \pi] \ni (\theta, \varphi) \mapsto \phi(\theta, \varphi) = (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma$ si ρ reste fixe. Nous calculons les vecteurs ε_θ et ε_φ , qui s'appellent maintenant ε_θ et ε_φ :

$$(3.11) \quad \varepsilon_\theta = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \rho \cos \theta \sin \varphi \\ -\rho \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \rho \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

on a alors facilement

$$(3.12) \quad \varepsilon_\theta \times \varepsilon_\varphi = \rho^2 \sin\theta \begin{cases} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{cases}$$

$$\text{Et } |\varepsilon_\theta \times \varepsilon_\varphi| = \sqrt{g(\theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\theta.$$

• Le calcul de l'aire de la sphère est alors un plaisir:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} d\sigma &= \int_0^\pi d\theta \int_{-\pi}^\pi d\varphi \rho^2 \sin\theta = 2\pi \rho^2 [-\cos\theta]_0^\pi \\ &= 4\pi \rho^2. \quad \text{Sans surprise.} \end{aligned}$$

On remarque aussi que dans ce cas, la matrice de gram est orthogonale. Mais nous verrons plus loin dans ce cours que ce n'est pas obligatoire en général, par exemple par l'étude des surfaces de la forme

$$(3.13) \quad z = f(x, y)$$

c'est à dire

$$(3.14) \quad \phi(x, y) = (x, y, f(x, y))^t.$$

④ Gradient surfacique

- Nous rappelons d'abord que le gradient ordinaire $\widehat{\nabla}\widehat{\varphi}$ d'une fonction scalaire $\widehat{\varphi}$ de deux variables \widehat{x}_1 et \widehat{x}_2 dans l'espace euclidien \mathbb{R}^2 est défini par

$$(4.1) \quad \widehat{\nabla}\widehat{\varphi} = \frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\widehat{x}_1} e_1 + \frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\widehat{x}_2} e_2.$$

Si $d\widehat{x} = \sum_j d\widehat{x}_j e_j$ est une variation du point $\widehat{x} \in \mathbb{R}^2$, on a la relation fondamentale

$$(4.2) \quad d\widehat{\varphi} = \widehat{\nabla}\widehat{\varphi} \cdot d\widehat{x}$$

où le \cdot représente le produit scalaire usuel dans l'espace \mathbb{R}^2 .

- Nous voulons faire de même avec une fonction φ définie sur une surface Σ de \mathbb{R}^3 . Nous cherchons à donner un sens à

$$(4.3) \quad d\varphi = \nabla_{\Sigma}\varphi \cdot dx$$

mais il faut définir tous les "objets" de la relation (4.3). Nous commençons par $d\varphi$ et dx .

- la surface Σ est paramétrée par la carte $\phi: \widehat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ et on a $x = \phi(\widehat{x})$. On a

donc naturellement

$$(4.4) \quad dx = d\Phi(\hat{x}), \quad x \in \Sigma, \quad x = \Phi(\hat{x})$$

matrice jacobienne de la transformation du plan \mathbb{R}^2 en une surface de \mathbb{R}^3 :

$$(4.5) \quad (d\Phi)_{ij} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \hat{x}_i}, \quad 1 \leq i \leq 2, \quad 1 \leq j \leq 3$$

C'est une matrice rectangulaire à deux lignes et trois colonnes. Nous avons aussi:

$$(4.6) \quad (d\Phi)_{ij} = (\varepsilon_i)_{j^o} \text{ coordonnée}$$

donc

$$(4.7) \quad dx = \sum_{j=1}^2 \varepsilon_j(\hat{x}) d\hat{x}_j$$

Le vecteur dx est un vecteur infinitésimal dans l'espace tangent $T_x \Sigma$ (voir la figure 7)

- En ce qui concerne la fonction φ , on a la composée $\hat{\varphi}(\hat{x})$ définie par:

$$(4.8) \quad \hat{\varphi}(\hat{x}) = \varphi(\Phi(\hat{x})), \quad \hat{x} \in \hat{\Sigma}$$

on a donc certainement $d\varphi = d\hat{\varphi}$, avec

$$(4.9) \quad d\hat{\varphi} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_j} d\hat{x}_j$$

ainsi qu'exprimé aux relations (4.1) et (4.2).

- On veut enfin que la relation (4.3) soit vraie 1-25
 pour toute variation dx donnée en (4.7),
toute surface Σ et toute fonction φ . Il
 est donc naturel de chercher $\nabla_{\Sigma} \varphi$ dans l'espace
 tangent $T_x M$ engendré par ε_1 et ε_2 . On
 pose donc

$$(4.10) \quad \nabla_{\Sigma} \varphi = \beta_1 \varepsilon_1 + \beta_2 \varepsilon_2 .$$

La relation (4.3), compte tenu de (4.9) et (4.7)
 prend la forme

$$\sum_j \frac{\widehat{\partial \varphi}}{\widehat{\partial x_j}} \widehat{dx_j} = \sum_k \beta_k \varepsilon_k \cdot \sum_l \varepsilon_l \widehat{dx_l}$$

Comme cette relation est vraie pour toute varia-
 tion $\widehat{dx_j}$, on en déduit :

$$(4.11) \quad \sum_k \beta_k \varepsilon_k \cdot \varepsilon_j = \frac{\widehat{\partial \varphi}}{\widehat{\partial x_j}} , \quad 1 \leq j \leq 2 ,$$

ou si l'on note β le vecteur $(\beta_1, \beta_2)^t$ et G la
 matrice de Gram d'éléments génériques $\varepsilon_k \cdot \varepsilon_j$:

$$(4.12) \quad G \cdot \beta = \widehat{\nabla \varphi}$$

- Les coordonnées du gradient surfacique $\nabla_{\Sigma} \varphi$
 demandent d'inverser la matrice de Gram.
 On introduit la base duale ε^* ou plus
 exactement covariante, associée à la métri-
 que de l'espace \mathbb{R}^3 et relative à la base,

(contravariante) ε_j . Le vecteur ε_i^* est défini¹⁻²⁶ par les deux conditions

$$(4.13) \quad \varepsilon_i^* \in T_x \Sigma, \text{ i.e. } \varepsilon_i^* \text{ est combinaison linéaire de } \varepsilon_1 \text{ et } \varepsilon_2$$

$$(4.14) \quad \varepsilon_i^* \cdot \varepsilon_j = \delta_{ij} \text{ (symbole de Kroneker)} \\ = 1 \text{ si } i=j, 0 \text{ si } i \neq j$$

- Notons que $\varepsilon_i^* \neq \varepsilon_i$ si $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \neq 0$, ainsi que le montre la construction géométrique à la figure 10.

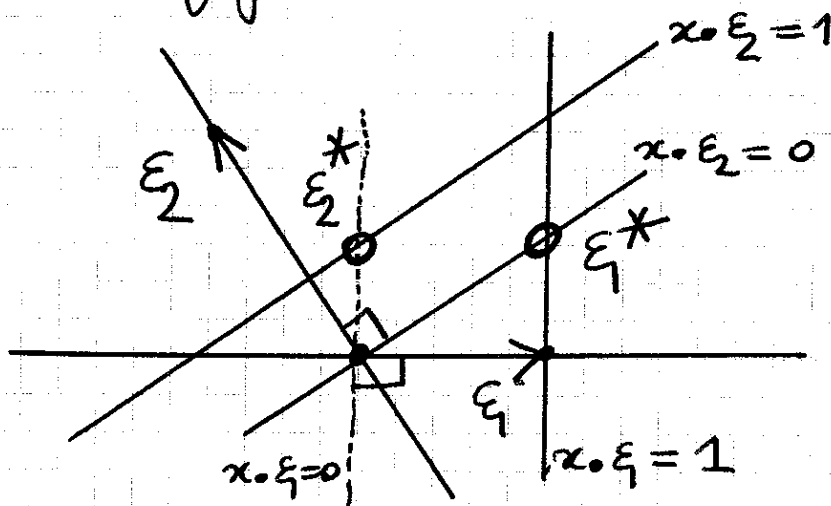


Figure 10. Construction de la base ε_i^* dans le cas où $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 < 0$, avec $\varepsilon_1 = 1$.

Nous avons la

Prop (4) gradient surfacique.
 Dans la base covariante ε_j , l'expression du gradient surfacique est très simple

$$(4.15) \quad \nabla_{\Sigma} \varphi = \sum_j \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_j} \varepsilon_j^*$$

1-27

Preuve de la proposition (4)

Nous avons la condition (4.3) qui définit $\nabla_{\Sigma} \varphi$, avec $d\varphi = d\hat{\varphi} = \sum_j \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_j} d\hat{x}_j$, $dx = \sum_j \varepsilon_j d\hat{x}_j$. Donc nous avons

$$(4.16) \quad \nabla_{\Sigma} \varphi \cdot \varepsilon_j = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \hat{x}_j}, \quad 1 \leq j \leq 2$$

qui est une autre façon d'exprimer la relation (4.11). Compte tenu de la définition (4.14) de la base covariante et du choix $\nabla_{\Sigma} \varphi \in T_x \Sigma$, la relation (4.15) en résulte. \square

D, 11 octobre 2005.