

# Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

## Cours 02

### Géométrie différentielle (ii)

Rappels

Divergence surfacique

Trace normale d'un rotationnel

Autres opérateurs surfaciques

Courbure

Coordonnées locales d'un champ de vecteurs

Trace de la divergence surfacique

Trace surfacique du rotationnel

François Dubois

octobre 2005, 27 pages

## CVM (2)

ch (I)

## géométrie différentielle (ii)

Cours du 12 oct 2005.

① Rappels

- on rappelle qu'on s'intéresse à un morceau de surface  $\Sigma$  paramétrisé par une "carte locale"  $\phi$ , application régulière de  $\hat{\Sigma} \subset \mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$

$$(1.1) \quad \mathbb{R}^2 \supset \hat{\Sigma} \ni \hat{x} \mapsto x = \phi(\hat{x}) \in \Sigma \subset \mathbb{R}^3.$$

Les vecteurs tangents  $E_i$  ( $i=1,2$ ) au point  $x \in \Sigma$  sont définis par

$$(1.2) \quad E_i(x) = \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_i}, \quad i=1,2$$

soit de façon équivalente

$$(1.3) \quad E_i(x) = d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{e}_i, \quad i=1,2$$

avec  $\hat{e}_i$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ :  $\hat{e}_1 = (1,0)$  et  $\hat{e}_2 = (0,1)$ . Les composantes dans  $\mathbb{R}^3$  du vecteur  $E_i$  relativement à la base canonique  $(e_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$  de  $\mathbb{R}^3$  s'écrivent simplement

$$(1.4) \quad E_i(x) = \sum_{\alpha=1}^3 E_i^\alpha(x) e_\alpha, \quad E_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}_i} \begin{cases} 1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq \alpha \leq 3 \end{cases}$$

où le point  $x = \phi(\hat{x})$  a pour coordonnées  $x^\alpha$  : 2-2

$$(1.5) \quad \phi(\hat{x}) = x = \sum_{\alpha=1}^3 x^\alpha(\hat{x}) e_\alpha, \quad x \in \Sigma.$$

- Si  $x$  parcourt une courbe fermée  $\Gamma$  de la surface, dont l'intérieur est encore noté  $\Sigma$ ,  $\partial\Sigma = \Gamma$ , alors le paramètre  $\hat{x} \in \hat{\Sigma}$  parcourant une courbe fermée  $\hat{\Gamma}$  du plan  $\mathbb{R}^2$ .

$$(1.6) \quad [0,1] \ni \theta \mapsto \hat{\gamma}(\theta) = \hat{x} \in \hat{\Gamma},$$

on peut construire l'application  $\theta \mapsto x = \gamma(\theta)$ , composé de  $\hat{\gamma}$  défini en (1.6) et de  $\phi$  :

$$(1.7) \quad [0,1] \ni \theta \mapsto \gamma(\theta) = \phi(\hat{\gamma}(\theta)) \in \Gamma \subset \Sigma \subset \mathbb{R}^3.$$

Le vecteur tangent unitaire  $\bar{\tau}(x)$  à  $x = \gamma(\theta)$  est proportionnel à  $\frac{d\gamma}{d\theta}$  :

$$(1.8) \quad \bar{\tau}(x) = \frac{d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{\tau}(\hat{x})}{|d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{\tau}(\hat{x})|}, \quad x \in \Gamma$$

ou

$$(1.9) \quad \hat{\tau}(\hat{x}) = \frac{1}{\left| \frac{d\hat{\gamma}}{d\theta} \right|} \frac{d\hat{\gamma}}{d\theta}, \quad \hat{x} = \hat{\gamma}(\theta)$$

est la tangente unitaire sur la courbe  $\hat{\Gamma}$  (voir la figure 1).

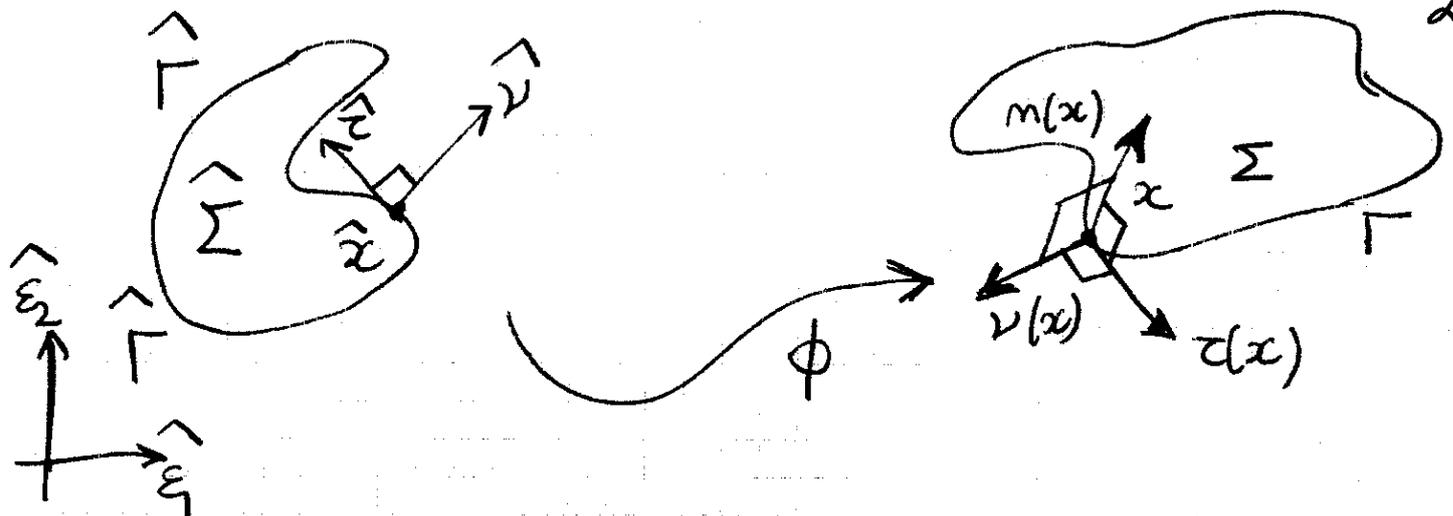


Figure 1 la courbe  $\Gamma$  tracée sur la surface  $\Sigma$  et ses éléments de contact en  $x \in \Gamma$ : vecteur tangent  $\tau(x)$ , vecteur normal à la surface  $n(x)$ ,  $\nu \equiv \tau \times n$  vecteur normal à  $\Gamma$  dans le plan tangent  $T_x \Sigma$ .

L'abscisse curviligne  $\hat{s}(\theta)$  le long de la courbe plane  $\hat{\Gamma}$  vérifie

$$(1.10) \quad \frac{d\hat{s}}{d\theta} = \left| \frac{d\hat{x}}{d\theta} \right| \quad , \quad \hat{x} = \hat{\gamma}(\theta) \in \hat{\Gamma}$$

alors que l'abscisse curviligne  $s$  le long de la courbe "gauche"  $\Gamma$  satisfait à:

$$\begin{aligned} ds^2 &= |dx|^2 = |d\phi(\hat{x}) \cdot d\hat{x}|^2 \\ &= |d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{\tau} d\hat{s}|^2 \\ &= |d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{\tau}|^2 d\hat{s}^2 \quad \text{car } \tau(x) \text{ donné en (1.8) est unitaire} \end{aligned}$$

on en déduit

$$(1.11) \quad \tau(x) = (d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{c}) \frac{d\hat{s}}{ds}, \quad x \in \Gamma$$

2-4

## ② Divergence surfacique

- Soit  $\Sigma \ni x \mapsto \xi(x) \in T_x \Sigma$  un champ de vecteurs sur la surface  $\Sigma$ . En tout point  $x$  de la surface, ce champ est un vecteur tangent à  $\Sigma$ ; on peut donc le développer sur la base  $\varepsilon_j(x)$ ; on note  $\hat{\xi}_j(\hat{x})$  ( $x = \phi(\hat{x})$ ) les composantes correspondantes:

$$(2.1) \quad \xi(x) = \sum_{j=1}^2 \hat{\xi}_j(\hat{x}) \varepsilon_j(x), \quad x \in \Sigma.$$

On peut alors considérer le champ  $\hat{\Sigma} \ni \hat{x} \mapsto \hat{\xi}(\hat{x}) \in \mathbb{R}^2$  de composantes  $\hat{\xi}_j$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ :

$$(2.2) \quad \hat{\xi}(\hat{x}) = \sum_{j=1}^2 \hat{\xi}_j(\hat{x}) \hat{\varepsilon}_j, \quad \hat{x} \in \hat{\Sigma}.$$

- La bonne approche est de partir de l'application  $\hat{\xi}$  décrite à la relation (2.2) puis de la composer avec la jacobienne  $d\phi(\hat{x})$  au point  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$

$$(2.3) \quad \mathbb{R}^2 \ni \hat{\xi} \mapsto d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{\xi} \in T_x \Sigma, \quad x \in \Sigma$$

on a alors

**Prop ①** champ de vecteurs tangents

$$(2.4) \quad \xi(x) = d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{\xi}(\hat{x}), \quad x \in \Sigma$$

## Preuve de la proposition ①

2-5

- On calcule le membre de droite de (2.4), avec  $\hat{\xi}(x)$  donné par la relation (2.2). On a alors, compte tenu de la linéarité de l'application  $d\phi(\hat{x})$  introduite en (2.3):

$$d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{\xi}(x) = \sum_{j=1}^2 \hat{\xi}_j(x) d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{E}_j$$

et la conclusion, c'est à dire la relation (2.1), est une conséquence de la relation (1.3) qui définit les vecteurs tangents  $E_j$ .  $\square$

- De la même façon que l'opérateur de divergence introduit dans le plan  $\mathbb{R}^2$  la relation d'intégration par parties

$$(2.5) \quad \int_{\hat{\Sigma}} \operatorname{div} \hat{\xi}(\hat{x}) d\hat{\sigma}(\hat{x}) = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{\xi} \cdot \hat{\nu} d\hat{s}, \quad \partial \hat{\Sigma} = \hat{\Gamma}$$

l'opérateur de divergence surfacique, traditionnellement noté  $\operatorname{div}_{\Gamma}$  permet une relation analogue sur la surface  $\Sigma$ :

$$(2.6) \quad \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \xi(x) d\sigma(x) = \int_{\partial \Sigma} \xi \cdot \nu ds$$

Nous allons même définir la divergence surfacique à l'aide de la relation (2.6):

(Prop) (2) Intégrale de contour.

Avec les notations introduites plus haut, on a

$$(2.7) \quad \int_{\partial \Sigma} \xi \cdot \nu \, ds = \int_{\hat{\Gamma}} \sqrt{g(x)} \hat{\xi} \cdot \hat{\nu} \, d\hat{s}$$

avec  $\hat{g}(x) = g(x) = \det(\varepsilon_i(x) \cdot \varepsilon_j(x))$ .

Preuve de la proposition (2).

- Tout d'abord (figure), la normale  $\nu$  dans le plan tangent est telle que

(2.8) le trièdre  $(\nu, \tau, n)$  est direct.

Nous avons donc

$$(2.9) \quad \nu = \tau \times n, \quad x \in \partial \Sigma$$

et  $\xi \cdot \nu = (\xi \times \tau) \cdot n$ , avec  $\tau$  donné à la relation

(1.11). Donc

$$\begin{aligned} \xi \times \tau &= (\hat{\xi}_1 \varepsilon_1 + \hat{\xi}_2 \varepsilon_2) \times \frac{d\hat{s}}{ds} (d\phi(x) \cdot \hat{\tau}) \\ &= \frac{d\hat{s}}{ds} (\hat{\xi}_1 \varepsilon_1 + \hat{\xi}_2 \varepsilon_2) \times (\hat{\tau}_1 \varepsilon_1 + \hat{\tau}_2 \varepsilon_2) \\ &= \frac{d\hat{s}}{ds} (\hat{\xi}_1 \hat{\tau}_2 - \hat{\xi}_2 \hat{\tau}_1) \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \end{aligned}$$

on a

$$(2.10) \quad \hat{\tau}_1 = -\hat{\nu}_2, \quad \hat{\tau}_2 = \hat{\nu}_1$$

puisque dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , le repère orthogonal

$(\hat{\nu}, \hat{\varepsilon})$  est direct (cf la figure 1). Nous avons 2-7  
donc

$$(\xi \times \tau) \cdot n = \frac{d\hat{s}}{ds} (\hat{\xi}_1 \cdot \hat{\nu}_1 + \hat{\xi}_2 \cdot \hat{\nu}_2) \frac{|\xi \times \varepsilon|^2}{|\xi \times \varepsilon_2|}$$

$$(2.11) \quad (\xi \times \tau) \cdot n = \sqrt{g} \frac{d\hat{s}}{ds} \hat{\xi} \cdot \hat{\nu} = \xi \cdot \nu$$

Par suite,

$$\int_{\partial \Sigma} \xi \cdot \nu \, ds = \int_{\hat{\Gamma}} \sqrt{g} \frac{d\hat{s}}{ds} \hat{\xi} \cdot \hat{\nu} \frac{ds}{d\hat{s}} d\hat{s} = \int_{\hat{\Gamma}} \sqrt{g} \hat{\xi} \cdot \hat{\nu} d\hat{s}$$

ce qui prouve la relation (2.7).

**Prop 3** Définition de la divergence surfacique.  
Avec les notations introduites plus haut,  
la relation

$$(2.12) \quad \operatorname{div}_{\hat{\Gamma}} \xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (\sqrt{g} \hat{\xi}_j(x))$$

permet de donner du sens à la relation (2.6).

Preuve de la proposition 3

- Nous poursuivons le calcul précédent, qui est une évaluation du membre de gauche de la relation (2.6) compte tenu de (2.7) et (2.5), on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Sigma} \xi \cdot \nu \, ds &= \int_{\hat{\Gamma}} \sqrt{g} \hat{\xi} \cdot \hat{\nu} d\hat{s} \\ &= \int_{\hat{\Sigma}} \operatorname{div} (\sqrt{g} \hat{\xi}) d\hat{\sigma} \end{aligned}$$

$$= \int_{\hat{\Sigma}} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (\sqrt{g} \hat{\xi}_j(\hat{x})) d\hat{\sigma}$$

$$= \int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_j \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (\sqrt{g} \hat{\xi}_j) d\sigma \quad \text{car } d\sigma = \sqrt{g} d\hat{\sigma}$$

et la relation (2.6) est une conséquence de (2.12).

- On peut aussi dire que (2.6) est vrai a priori. Alors on a l'égalité

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Gamma} \xi d\sigma = \int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_j \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} (\sqrt{g} \hat{\xi}_j) d\sigma$$

pour toute surface fermée  $\Sigma$  et tout champ de vecteurs  $\xi = d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{\xi}$ . C'est alors la définition (2.12) qui est imposée ! □

③ Trace normale d'un rotationnel.

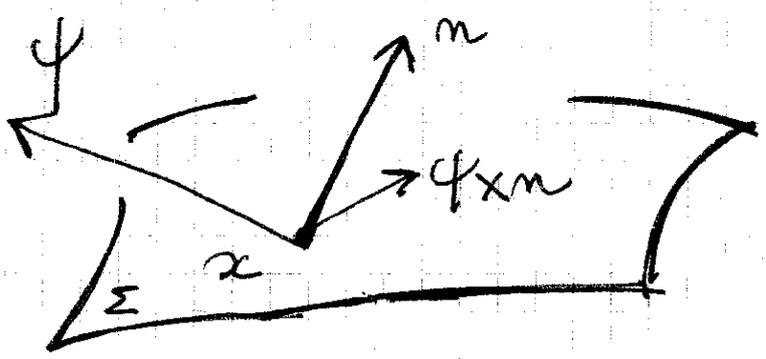


Figure 2. La composante normale du rotationnel rot  $\phi$  ne dépend que de la trace tangentielle  $\phi_{x n}$  du champ de vecteurs  $\phi$ .

- Nous notons maintenant  $\psi$  le champ de vecteurs<sup>2-9</sup> défini dans l'espace entier  $\mathbb{R}^3$  par

$$(3.1) \quad \mathbb{R}^3 \ni x \mapsto \psi(x) = \sum_{\alpha=1}^3 \psi^\alpha(x) e_\alpha \in \mathbb{R}^3$$

son rotationnel  $\text{rot} \psi$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^3$  dont la  $\eta^\circ$  composante est donnée par

$$(3.2) \quad (\text{rot} \psi)_\eta^\circ = \sum_{\beta, \alpha} \varepsilon_{\eta \beta \alpha} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial x_\beta}$$

Nous nous intéressons à la composante normale  $\text{rot} \psi \cdot n$  de ce rotationnel relativement à la surface  $\Sigma$ . Nous définissons le champ scalaire  $\hat{\Psi}_\alpha(\hat{x})$  pour  $\hat{x} \in \hat{\Sigma} \subset \mathbb{R}^2$  par

$$(3.3) \quad \hat{\Psi}_\alpha(\hat{x}) = \psi^\alpha(\phi(\hat{x})), \quad \hat{x} \in \hat{\Sigma}.$$

Nous avons alors le lemme suivant

**Prop (4)** Divergence surfacique de  $\psi \times n$

$$(3.4) \quad \text{div}_\Gamma(\psi \times n) = \frac{1}{\sqrt{J}} \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{\Psi}_\alpha}{\partial \hat{x}_1} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial \hat{\Psi}_\alpha}{\partial \hat{x}_2} \right)$$

Preuve de la proposition (4)

- Il suffit de décomposer avec soin le vecteur  $\xi \equiv \psi \times n$ , tangent à la surface  $\Sigma$  dans la base  $e_j$  de l'espace tangent  $T_x \Sigma$  et d'utiliser

la relation (2.12). Nous avons

$$(3.5) \quad m = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon_1 \times \varepsilon_2, \quad x \in \Sigma.$$

Donc

$$\begin{aligned} \psi \times m &= \frac{1}{\sqrt{g}} \psi \times (\varepsilon_1 \times \varepsilon_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} ((\psi \cdot \varepsilon_2) \varepsilon_1 - (\psi \cdot \varepsilon_1) \varepsilon_2) \\ &\equiv \hat{\xi}_1 \varepsilon_1 + \hat{\xi}_2 \varepsilon_2 \quad \text{avec} \end{aligned}$$

$$(3.6) \quad \begin{cases} \hat{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \psi \cdot \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \hat{\psi} \cdot (d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{\varepsilon}_2), \quad \hat{x} \in \hat{\Sigma} \\ \hat{\xi}_2 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \psi \cdot \varepsilon_1 = -\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \hat{\psi} \cdot (d\phi(\hat{x}) \cdot \hat{\varepsilon}_1), \quad \hat{x} \in \hat{\Sigma} \end{cases}$$

• Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} (\sqrt{\hat{g}} \hat{\xi}_1) &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \left( \sum_{\alpha} \hat{\psi}^{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \hat{x}_2} \right) = \\ &= \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial \hat{\psi}^{\alpha}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \hat{x}_2} + \hat{\psi}^{\alpha} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} (\sqrt{\hat{g}} \hat{\xi}_2) &= -\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \left( \sum_{\alpha} \hat{\psi}^{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \hat{x}_1} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \left( -\frac{\partial \hat{\psi}^{\alpha}}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \hat{x}_1} - \hat{\psi}^{\alpha} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial \hat{x}_2 \partial \hat{x}_1} \right) \end{aligned}$$

Quand on somme les deux relations précédentes, les dérivées croisées s'éliminent. Il vient

$$\operatorname{div}(\sqrt{g} \hat{\xi}) = \sum_{\alpha} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \hat{x}_2} - \sum_{\alpha} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \hat{x}_1}$$

2-11

or la relation (3.4) est une conséquence directe de la relation (2.12).

- Nous pouvons maintenant énoncer la relation suivante, fort utile en pratique

**Prop (5)** Rotationnel surfacique

Avec les notations introduites plus haut, nous avons

$$(3.7) \quad \operatorname{rot} \psi \cdot n = \operatorname{div}_{\Gamma}(\psi \times n), \quad x \in \Sigma$$

Preuve de la proposition (5)

On a:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \psi \cdot n &= \sum_{\eta} (\operatorname{rot} \psi)_{\eta} \cdot n_{\eta} \\ &= \sum_{\beta, \alpha} \varepsilon_{\eta \beta \alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \psi^{\alpha} \sum_{\rho, \gamma} \varepsilon_{\eta \rho \gamma} \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon_1^{\rho} \varepsilon_2^{\gamma} \\ &= \sum_{\beta, \alpha, \rho, \gamma} (\delta_{\beta \rho} \delta_{\alpha \gamma} - \delta_{\beta \gamma} \delta_{\alpha \rho}) \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \hat{x}_2} \\ &= \sum_{\beta, \alpha} \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \hat{x}_2} \right) \end{aligned}$$

or la dérivée par rapport à  $\hat{x}_k$  du champ  $\psi^{\alpha}$  donnée à la relation (3.3) est calculable par

le théorème de dérivation des fonctions complexes :

$$(3.8) \quad \frac{\partial \hat{\varphi}^\alpha}{\partial \hat{x}_k} = \sum_{\beta} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \hat{x}_k}, \quad \hat{x} \in \hat{\Sigma}.$$

• On déduit alors du calcul précédent et de la relation (3.8) :

$$(\text{rot } \varphi) \cdot n = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\alpha} \left( \frac{\partial \hat{\varphi}^\alpha}{\partial \hat{x}_1} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\partial \hat{\varphi}^\alpha}{\partial \hat{x}_2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}_1} \right)$$

relation identique à (3.4), à la commutation près de la multiplication des nombres réels ! La proposition 5 en résulte.  $\square$

### ④ autres opérateurs surfaciques.

• Rappelons que nous avons déjà défini le gradient surfacique  $\nabla_{\Gamma} \varphi$  d'un champ scalaire  $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi que la divergence surfacique  $\text{div}_{\Gamma} \xi$  d'un champ de vecteurs tangent  $\Sigma \rightarrow T\Sigma$ , où

$$(4.1) \quad T\Sigma = \bigcup_{x \in \Sigma} T_x \Sigma$$

est la réunion des espaces tangents aux différents points de la surface.

• Le rotationnel surfacique d'un champ de vecteur tangent  $\xi$  est défini par

$$(4.2) \quad \text{rot}_{\Gamma} \xi \equiv \text{div}_{\Gamma} (\xi \times n).$$

La relation (3.7) peut donc aussi s'écrire

$$(4.3) \quad \text{rot} \varphi \cdot n = \text{rot}_{\Gamma} \Pi \varphi$$

où

$$(4.4) \quad \Pi \varphi \equiv n \times \varphi \times n$$

est la composante tangentielle du champ de vecteurs  $\varphi$  :  $\varphi = \Pi \varphi + (\varphi \cdot n)n$ . On a

$\Pi \varphi = (n \times \varphi) \times n = n \times (\varphi \times n)$ , ce qui explique l'absence de parenthèses au membre de droite de la relation (4.4).

- Le rotationnel surfacique  $\text{rot}_{\Gamma} \varphi$  d'un champ scalaire  $\varphi$  est le gradient surfacique tourné de  $\Pi/2$  à l'aide de la normale :

$$(4.5) \quad \vec{\text{rot}}_{\Gamma} \varphi \equiv \nabla_{\Gamma} \varphi \times n, \quad x \in \Sigma$$

- Le laplacien surfacique  $\Delta_{\Gamma}$ , ou opérateur de Laplace-Beltrami sur la surface  $\Sigma$ , est simplement la composée du gradient surfacique et de la divergence surfacique :

$$(4.6) \quad \Delta_{\Gamma} \varphi \equiv \text{div}_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} \varphi), \quad x \in \Sigma$$

on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot}_{\Gamma}(\vec{\operatorname{rot}}_{\Gamma} \varphi) &= \operatorname{div}_{\Gamma}(\vec{\operatorname{rot}}_{\Gamma} \varphi \times n) \\
 &= \operatorname{div}_{\Gamma}((\nabla_{\Gamma} \varphi \times n) \times n) \\
 &= -\operatorname{div}_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \varphi \\
 &= -\Delta_{\Gamma} \varphi
 \end{aligned}$$

$$(4.7) \quad \operatorname{rot}_{\Gamma}(\vec{\operatorname{rot}}_{\Gamma} \varphi) = -\Delta_{\Gamma} \varphi, \quad x \in \Sigma$$

- on peut vérifier que pour la sphère, le laplacien de Beltrami est donné par la relation classique

$$(4.8) \quad \Delta_{\Gamma} \varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2}.$$

♫, 16 octobre 2005.

CVM

ch(I)

## Géométrie différentielle (iii)

## Courbure et conséquences

## ① Courbure

- on rappelle que la surface  $\Sigma$  est paramétrisée localement par la carte  $\phi$ , avec  $x = \phi(\hat{x})$ ,  $x \in \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  et  $\hat{x} \in \hat{\Sigma} \subset \mathbb{R}^2$ . On note  $\varepsilon_j$  le vecteur tangent dans la  $j^{\text{e}}$  direction

$$(1.1) \quad \varepsilon_j = \frac{\partial \phi}{\partial \hat{x}_j} \equiv \hat{\partial}_j \phi, \quad 1 \leq j \leq 2$$

- La métrique  $G$  est définie par le produit scalaire (dans  $\mathbb{R}^3$ ):

$$(1.2) \quad G_{ij} = \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j, \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

Si  $g \equiv \det G$ , on a  $ds = \sqrt{g} d\hat{x}$  l'élément d'aire infinitésimale sur la surface  $\Sigma$ . On a la

Proposition (1) Une dérivation du déterminant

$$(1.3) \quad \sum_{j \neq l} G_{jl}^{-1} \varepsilon_l \cdot \hat{\partial}_j \varepsilon_m = \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{\partial}_m \sqrt{g}$$

Preuve de la proposition (1)

Soit  $\text{Cof}_{ij}$  le cofacteur associé à l'élément  $G_{ij}$ . On

peut alors développer  $g$  selon la  $j^{\circ}$  colonne, et on a:

$$(1.4) \quad \sum_i G_{ij} \text{Cof}_{ij} = g, \quad \forall j$$

Si on remplace la  $k^{\circ}$  colonne par la  $j^{\circ}$  colonne avec  $j \neq k$ , alors le déterminant correspondant est nul:

$$(1.5) \quad \sum_i G_{ij} \text{Cof}_{ik} = 0, \quad j \neq k.$$

La matrice des cofacteurs est donc reliée simplement à la matrice inverse de  $G$ :

$$(1.6) \quad \text{Cof}_{ik} = g G^{-1}_{ki}$$

- Quand on dérive  $g$ , on dérive successivement les diverses colonnes, et on fait la somme.

La dérivée de la  $j^{\circ}$  colonne en le déterminant  $\sum_i dG_{ij} \text{Cof}_{ij}$ . On en déduit

$$(1.7) \quad dg = \sum_{ij} dG_{ij} \text{Cof}_{ij}$$

Comme  $dG_{ij} = d\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j + \varepsilon_i \cdot d\varepsilon_j$  et que la matrice  $G^{-1}$  est symétrique car  $G$  l'est, on déduit de (1.7) et (1.6):

$$(1.8) \quad dg = 2g \sum_{ij} G^{-1}_{ji} \varepsilon_i d\varepsilon_j$$

Si on prend la dérivée par rapport à  $\hat{x}_m$ , il vient

$$(1.9) \quad \sum_{j \neq l} G^{-1}_{jl} \varepsilon_l \cdot \hat{\partial}_m \varepsilon_j = \frac{1}{2g} \hat{\partial}_m g = \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{\partial}_m \sqrt{g}$$

L'expression au membre de gauche de (1.9) est exactement identique à celle du membre de gauche de (1.3) puisque

$$(1.10) \quad \hat{\partial}_j \varepsilon_m = \hat{\partial}_m \varepsilon_j = \hat{\partial}_j \hat{\partial}_m \phi$$

grâce à l'échange de l'ordre des dérivées partielles (théorème de Schwarz)

- Le tenseur de courbure  $\rho$  s'obtient en dérivant la normale  $n \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$  à la surface  $\Sigma$ . On a  $|n|^2 \equiv 1$ , donc  $dn$  est orthogonal à  $n$ ; il est donc porté par le plan tangent. On pose

$$(1.11) \quad dn = \sum_{jk} \rho_k^j \varepsilon_j dx^k$$

l'opérateur de courbure  $\rho$  est défini par son action sur le vecteur de base  $\varepsilon_k$ . On pose

$$(1.12) \quad \rho \cdot \varepsilon_k = \sum_j \rho_k^j \varepsilon_j$$

et dans la notation  $\rho_k^j$ ,  $k$  désigne l'indice de colonne et  $j$  l'indice de la ligne. On a donc

$$(1.13) \quad dn = \rho \cdot dM$$

où  $dM$  est un vecteur infinitésimal sur la surface.

Prop 2 Le tenseur de courbure est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . (4)

Preuve

• on dérive la relation d'orthogonalité  $n \cdot \varepsilon_j \equiv 0$ .

Il vient

$$(1.14) \quad dn \cdot \varepsilon_j + n \cdot d\varepsilon_j = 0.$$

fait compte tenu de (1.1) et (1.11):

$$(1.15) \quad \rho_k^l G_{jl} dx^k + n \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} dx^k = 0$$

on introduit une seconde courbure notée  $\gamma$ :

$$(1.16) \quad \gamma_{jk} = \sum_l \rho_k^l G_{lj}$$

Alors la relation (1.15) et le théorème de Schwarz montrent que  $\gamma_{jk} = \gamma_{kj}$ , matrice symétrique.

• on déduit de (1.16)

$$(1.17) \quad \rho = \gamma \cdot G^{-1}$$

et le tenseur de courbure est le produit de  $\gamma$ , matrice symétrique par  $G^{-1}$  matrice symétrique définie positive dont la racine carrée  $G^{-1/2}$  et son inverse  $G^{1/2}$  sont bien définis comme matrices symétriques définies positives. On déduit donc de (1.17):

$$(1.18) \quad \rho = G^{1/2} (G^{-1/2} \gamma G^{-1/2}) G^{-1/2}.$$

La matrice  $\rho$  est donc la conjuguée d'une matrice

symétrique  $G^{-1/2} \gamma G^{-1/2}$  donc diagonalisable C-5  
 et  $\rho$  en conséquence diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .  $\square$

- Les directions principales de courbure sont les vecteurs propres de  $\rho$ . Elles sont orthogonales sur  $\Sigma$  puisqu'on a de façon générale

$$(1.19) \quad (\rho \cdot \xi) \cdot \eta = \eta \cdot (\rho \cdot \xi) \quad , \quad \xi, \eta \in T_x \Sigma$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} (\rho \cdot \xi) \cdot \eta &= \left( \rho^k \xi^j \varepsilon_k \right) \cdot \left( \eta^l \varepsilon_l \right) \\ &= \rho^k \varepsilon_k \cdot G_{kl} \xi^j \eta^l = \gamma_{je} \xi^j \eta^e \end{aligned}$$

et cette expression est symétrique compte tenu de la symétrie de  $\gamma$ , voir plus haut page 4. Donc si  $\xi_1$  est vecteur propre de  $\rho$  associé à la valeur propre  $\delta_1$  et de même pour  $\xi_2$  relativement à  $\delta_2$ , on a

$$(1.20) \quad \delta_1 (\xi_1 \cdot \xi_2) = \delta_2 (\xi_1 \cdot \xi_2)$$

Si  $\delta_1 = \delta_2$ , tous les vecteurs tangents sont des vecteurs propres de  $\rho$  et tout couple de directions orthogonales est une base de vecteurs propres de  $\rho$ . Si  $\delta_1 \neq \delta_2$ , la relation (1.20) montre clairement le résultat  $\square$

- Si  $s \mapsto M(s) \in \Sigma$  est une courbe tracée sur la surface de sorte que  $\frac{dM}{ds} = \xi$ , vecteur propre de  $\rho$  de valeur propre  $\gamma$ . Alors  $\frac{dn}{ds} = \gamma \xi$  est colinéaire également à  $\xi$ . On a en effet :  

$$\frac{dn}{ds} = dn \cdot \frac{dM}{ds} = \rho \cdot \frac{dM}{ds} = \rho \cdot (\xi) = \gamma \xi$$
 car  $\xi$  est vecteur propre de l'opérateur  $\rho$ . Les courbures principales sont celles pour lesquelles la variation du vecteur normal est colinéaire au vecteur tangent. On introduit classiquement la courbure moyenne  $\mu$  par la relation

$$(1.21) \quad \mu = \frac{1}{2} \text{tr} \rho = \frac{1}{2} \rho_k^k$$

## ② Cordonnées locales d'un champ de vecteurs

- Au voisinage de la surface  $\Sigma$ , on peut paramétrer un "tube" de petite épaisseur à l'aide de coordonnées locales formées d'une part de  $M \in \Sigma$  et d'autre part de l'abscisse  $\hat{z}$  le long du vecteur normal :

$$(2.1) \quad x = M + \hat{z} n(M).$$

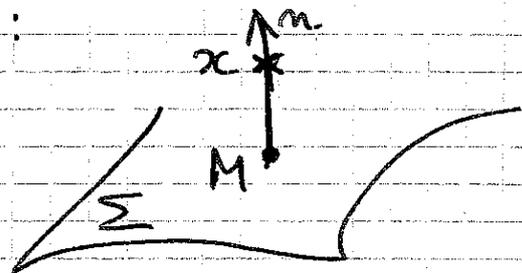


Figure 1 Paramétrage d'un point  $x \in \mathbb{R}^3$  au voisinage de la surface  $\Sigma$

L'application  $(\hat{x}, \hat{z}) \mapsto x = \phi(\hat{x}) + \hat{z} n(\phi(\hat{x})) \in \mathbb{R}^3$   
 a une jacobienne  $J$  telle que pour  $x \in \Sigma$ , on a

$$(2.2) \quad J(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & n^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & n^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & n^3 \end{pmatrix}$$

son inverse  $J^{-1}(x)$  en donc égale à la matrice  
 suivante :

$$(2.3) \quad J^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \left( \sum_j G_{ij}^{-1} \varepsilon_j^\alpha \right)_{1 \leq i \leq 2} \\ (n^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq 3} \end{pmatrix}$$

- De façon pratique, si on dérive dans la direction  $x^\beta$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , on a :

$$\begin{aligned} \partial_\beta &= \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \\ &= \sum_j G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\beta \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j} + n^\beta \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \partial_\beta = G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\beta \frac{\partial}{\partial \hat{x}^j} + n^\beta \frac{\partial}{\partial \hat{z}}, \quad 1 \leq \beta \leq 3$$

- Nous considérons maintenant un champ de vecteurs  $\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}^3$ , nous pouvons considérer  $x$  comme paramétré par  $(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{z}) \equiv \hat{x} \in \mathbb{R}^3$  et introduire  
 $\nearrow \xi$  tangente à  $M = \phi(\hat{x}^1, \hat{x}^2) \in \Sigma$   
 $\nwarrow$  la composante (du champ  $u$ ,

ainsi que la composante normale  $\theta_m$ . Nous avons donc "naturellement",

$$(2.5) \quad u(x) = \xi(\hat{x}, \hat{z}) + \theta(\hat{x}, \hat{z}) n(\hat{x})$$

Nous développons aussi le vecteur tangent  $\xi$  dans la base des  $E_m$ :

$$(2.6) \quad \xi = \sum_m \hat{\xi}_m E_m \equiv \Pi u = n \times u \times n.$$

La composante  $u^\alpha$  ( $1 \leq \alpha \leq 3$ ) du champ de vecteurs  $u$  est donc donnée par

$$(2.7) \quad u^\alpha = \sum_m \hat{\xi}_m^\alpha(\hat{x}, \hat{z}) E_m^\alpha(\hat{x}) + \theta(\hat{x}, \hat{z}) n^\alpha(\hat{x}), \quad 1 \leq \alpha \leq 3$$

Compte tenu du point (2.4), on a:

$$(2.8) \quad \partial_\beta u^\alpha = G_{jl}^{-1} E_l^\beta \partial_j (\sum_m \hat{\xi}_m^\alpha + \theta n^\alpha) + n^\beta \partial_z (\sum_m \hat{\xi}_m^\alpha + \theta n^\alpha)$$

avec convention de sommation sur les indices répétés.

### ③ Trace de la divergence surfacique

Prop ③ on a la relation

$$(3.1) \quad \text{div}_\Sigma u = \text{div}_\Gamma (n \times u \times n) + 2\mu(u \cdot n) + \frac{\partial}{\partial n} (u \cdot n)$$

où  $\mu$  est la courbure moyenne définie à la relation (1.21)

# Preuve de la proposition (3)

C-9

$$\begin{aligned}
 \text{On a } \text{div} u &= \partial_\beta u^\beta = \\
 &= G_{jl}^{-1} \epsilon_l^\alpha \partial_j \hat{\xi}_m^\alpha \epsilon_m^\alpha + G_{jl}^{-1} \epsilon_l^\alpha \hat{\xi}_m^\alpha \partial_j \epsilon_m^\alpha + G_{jl}^{-1} \epsilon_l^\alpha (\partial_j \theta) m^\alpha \\
 &\quad + G_{jl}^{-1} \epsilon_l^\alpha \theta (\partial_j m^\alpha) + m^\alpha (\partial_z \hat{\xi}_m^\alpha) \epsilon_m^\alpha + n^\alpha (\partial_z \theta) m^\alpha \\
 &= G_{jl}^{-1} G_{lm} (\partial_j \hat{\xi}_m^\alpha) + G_{jl}^{-1} \epsilon_l^\alpha (\partial_j \epsilon_m^\alpha) \hat{\xi}_m^\alpha + 0 \\
 &\quad + G_{jl}^{-1} \epsilon_l^\alpha \rho_j^k \epsilon_k^\alpha \theta + 0 + \partial_z \theta \quad \text{car } \epsilon_k \cdot m \equiv 0 \\
 &= \partial_m \hat{\xi}_m^\alpha + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_m \sqrt{g} (\hat{\xi}_m^\alpha) \quad \{\text{cf (1.3)}\} \\
 &\quad + G_{jl}^{-1} G_{lk} \rho_j^k \theta + \partial_z \theta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_m (\sqrt{g} \hat{\xi}_m^\alpha) + (\bar{\mu} \rho) \theta + \partial_z \theta \\
 &= \text{div}_F \hat{\xi} + 2\mu \theta + \frac{\partial \theta}{\partial z}
 \end{aligned}$$

ce qui établit (3.1), à la variante près concernant les notations.  $\square$

## ④ Trace surfacique du rotationnel

- Nous avons vu lors de la seconde leçon que

$$(4.1) \quad \text{rot } u \cdot n = \text{div}_\Sigma (u \times n) \quad \text{sur } \Sigma$$

Nous calculons dans ce paragraphe la composante tangentielle  $n \times (\text{rot } u) \times n$  du rotationnel. Il est utile d'explicitier la variation d'un vecteur tangent dans la direction normale à l'aide du tenseur de courbure.

## Prop ④ Composante normale de la dérivée d'un vecteur tangent.

On a

$$(4.2) \quad n \cdot d\varepsilon_k = -\rho_j^l G_{lk} dx^j$$

### Preuve de la proposition ④

On dérive la relation  $n \cdot \varepsilon_k \equiv 0$  et on prend en compte la définition (1.11) du tenseur de courbure. Il vient

$$n \cdot d\varepsilon_k = -\varepsilon_k \cdot dn = -\varepsilon_k \cdot \rho_j^l \varepsilon_l \cdot dx^j = -G_{kl} \rho_j^l dx^j$$

ce qui établit la relation (4.2).  $\square$

- On calcule la composante  $\eta$  de  $\text{rot } u \times n$ , qui est à une rotation de  $\pi/2$  près dans le plan tangent, la grandeur recherchée. On a:

$$\begin{aligned}
 (\text{rot} u \times m)_\gamma &= \varepsilon_{\gamma\delta\eta} (\text{rot} u)_\delta m_\eta \\
 &= \varepsilon_{\gamma\delta\eta} \varepsilon_{\rho\beta\alpha} (\partial_\beta u^\alpha) m_\rho \\
 &= \varepsilon_{\gamma\eta\rho} \varepsilon_{\rho\beta\alpha} (\partial_\beta u^\alpha) m_\gamma \\
 &= (\delta_{\gamma\beta} \delta_{\eta\alpha} - \delta_{\gamma\alpha} \delta_{\eta\beta}) (\partial_\beta u^\alpha) m_\gamma \\
 &= (\partial_\gamma u^\eta) m_\gamma - (\partial_\eta u^\gamma) m_\gamma
 \end{aligned}$$

Puis on remplace  $\partial_\gamma u^\eta$  et  $\partial_\eta u^\gamma$  à l'aide de la relation (2.8). Il vient

$$\begin{aligned}
 (\text{rot} u \times m)_\gamma &= G_{jl}^{-1} \left[ \varepsilon_l^\eta \hat{\partial}_j (\hat{\xi}_m \varepsilon_m^\eta + \theta m^\eta) \right] m_\gamma \\
 &\quad - G_{jl}^{-1} \left[ \varepsilon_l^\eta \hat{\partial}_j (\hat{\xi}_m \varepsilon_m^\eta + \theta m^\eta) \right] m_\gamma \\
 &\quad + m^\eta \hat{\partial}_z (\hat{\xi}_m \varepsilon_m^\eta + \theta m^\eta) m_\gamma \\
 &\quad - m^\eta \hat{\partial}_z (\hat{\xi}_m \varepsilon_m^\eta + \theta m^\eta) m_\gamma \quad \text{car } n \cdot \hat{\xi} = 0 \\
 &= -G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta \left[ \hat{\xi}_m \hat{\partial}_j \varepsilon_m^\eta + (\hat{\partial}_j \theta) m^\eta + \theta (\hat{\partial}_j m^\eta) \right] m_\gamma \\
 &\quad + \hat{\partial}_z \xi^\eta + (\partial_z \theta) m^\eta - m^\eta \hat{\xi}_m (\hat{\partial}_z \varepsilon_m^\eta) m_\gamma - m^\eta (\hat{\partial}_z \theta) \\
 &\quad \text{car } \hat{\partial}_z n = \hat{\partial}_z \varepsilon_m = 0 \\
 &= -G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta \hat{\xi}_m (-\rho_j^p G_{pm}) \quad \text{compte tenu de (4.2)} \\
 &\quad - G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta \hat{\partial}_j \theta + \hat{\partial}_z \xi^\eta \quad \text{car } \hat{\partial}_z \varepsilon_m = 0 \\
 &= G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta \rho_j^p \varepsilon_p \cdot \xi - G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta \hat{\partial}_j \theta + \hat{\partial}_z \xi^\eta.
 \end{aligned}$$

joli résultat intermédiaire :

C-12

$$(4.3) \quad (\text{rot} u \times n)_\eta = G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta \rho^p \varepsilon_p \cdot \xi - G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta \hat{\partial}_j \cdot \theta + \hat{\partial}_z \xi^\eta$$

- Nous savons que le gradient surfacique  $\nabla_\Gamma \theta$  de la fonction  $\theta$  vérifie :

$$(4.4) \quad \hat{\partial}_j \cdot \theta = \nabla_\Gamma \theta \cdot \xi_j$$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad - G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta \hat{\partial}_j \cdot \theta &= - G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta (\nabla_\Gamma \theta)^m G_{jm} \\ &= - \delta_{lm} \varepsilon_l^\eta (\nabla_\Gamma \theta)^m = - (\nabla_\Gamma \theta)^m \varepsilon_m^\eta \\ &= - (\nabla_\Gamma \theta)^\eta \end{aligned}$$

- Par ailleurs

$$\begin{aligned} G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta \rho^p \varepsilon_p \cdot \xi &= G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta (\rho \cdot \xi)_j \cdot \xi \\ &= G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta \xi_j \cdot (\rho \cdot \xi) \quad \text{compte tenu de (1.19)} \\ &= G_{jl}^{-1} \varepsilon_l^\eta G_{jp} (\rho \cdot \xi)^p \\ &= \varepsilon_p^\eta (\rho \cdot \xi)^p = (\rho \cdot \xi)^\eta. \quad \text{D'où} \end{aligned}$$

$$(4.5) \quad (\text{rot} u \times n)_\eta = (\rho \cdot \xi)^\eta - (\nabla_\Gamma \theta)^\eta + \hat{\partial}_z \xi^\eta$$

Prop (5) Trace du rotationnel surfacique. Sur  $\Sigma$ , on a :

$$(4.6) \quad \text{rot} u \times n = \rho \cdot (n \times u \times n) - \nabla_\Gamma (u \cdot n) + \frac{\partial}{\partial n} (n \times u \times n)$$

$$(4.7) \quad n \times (\text{rot} u) \times n = -\rho \cdot (u \times n) + \nabla_\Gamma (u \cdot n) \times n - \frac{\partial}{\partial n} (u \times n).$$

5 22/11/05