le cnam

# Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

# Cours 04

## Espaces de Sobolev vectoriels (ii)

Espace de Sobolev H1

Introduction au théorème de trace

Espaces de Sobolev vectoriels

François Dubois

octobre 2005, 23 pages

CVM (4)

ch (II) $\boxed{\text{Espaces de Sobolev vectoriels (ii)}}$

Cours du 26 oct 2005

## (1) Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

- Dans la suite de cette leçon, $\Omega$ est un ouvert borné, connexe (d'un seul tenant) de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2,$ ou $3$) dont la frontière $\partial\Omega$ est assez régulière. Pour $x \in \partial\Omega$, on désigne par $n(x)$ la normale au domaine $\Omega$, dirigée vers l'extérieur de $\Omega$.

- L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est la généralisation à un ouvert quelconque de l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ étudié à la précédente leçon. Il est composé des "fonctions-test" très régulières $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ nulles en dehors d'un compact (un fermé, borné inclus dans $\Omega$). Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\exists K$ compact de $\mathbb{R}^n$ inclus dans $\Omega$ (puisque $\Omega$ est borné, $K$ est avant tout fermé : si $x_k \in K$ est une suite qui converge vers un point $x \in \Omega$, alors $x \in K$) tel que $\varphi(y) = 0$ si $y \notin K$, et $\varphi$ est indéfiniment dérivable $\Omega \to \mathbb{R}$. On note $\partial_j \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ la dérivée partielle par rapport à la $j^e$ variable.

- Si $u$ et $v$ sont deux fonctions régulières $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}$, on dispose de la <u>formule de Green</u>:

$$(1.1) \qquad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} u v n_j \, d\sigma .$$

Si dans la relation (1.1), on prend $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors le terme de bord est nul car $\varphi$ est à support compact (donc est nulle au bord) et on a dans ce cas

$$(1.2) \qquad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

- La remarque qui précède permet de définir la dérivée d'une fonction $u$ arbitraire appartenant à $L^\infty_{loc}(\Omega)$ (afin de donner un sens au membre de droite de (1.2)), <u>au sens des distributions</u>:

$$(1.3) \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} u, \varphi \right\rangle = -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

En général la dérivée au sens des distributions de la fonction $u$ <u>n'est pas</u> une fonction, comme nous l'avons vu lorsque $\Omega = \mathbb{R}$. Mais lorsque il existe $u_j \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ de sorte que "la distribution $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ est représentée par la fonction $u_j$", i.e

$$(1.4) \quad -\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega u_j \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

alors on dit que "la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ est une fonction".

- L'espace $H^1(\Omega)$ est composé des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ :

(1.5) $$\int_\Omega |u(x)|^2 dx < \infty$$

telles que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, la distribution $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ est représentée par une fonction $u_j$ :

(1.6) $$\exists u_j : \Omega \to \mathbb{R} \,/\, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \rangle = \int_\Omega u_j \cdot \varphi \, dx$$

compte tenu de la définition (1.3). Et de plus, la fonction $u_j$ de la relation (1.6) appartient à $L^2(\Omega)$ :

(1.7) $$\int_\Omega |u_j|^2 dx < \infty, \; u_j \text{ définie par (1.6)}.$$

On résume ces trois conditions, par la notation (abusive !)

(1.8) $$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \forall j = 1, \dots, n, \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

En effet, pour $u$ / $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ au sens des distributions est une fonction $u_j$, on note ensuite $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ au lieu de $u_j$.

- Si $\Omega = ]-1,+1[$ pour fixer les idées, les propriétés vues à la leçon précédente montrent que la fonction de Heaviside $H(x)$ n'appartient pas à l'espace $H^1(-1,+1) \equiv H^1(]-1,+1[)$. En effet, la dérivée $\partial_x H$ de cette fonction est la distribution $\delta$ de Dirac :

(1.9) $\langle \partial_x H, \varphi \rangle = \varphi(0)\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]-1,+1[)$

et nous avons vu que cette distribution n'est pas une fonction. Donc $H$ n'appartient pas à l'espace de Sobolev $H^1(-1,+1)$

- Avec le même domaine $\Omega = ]-1,+1[$, on avons vu que la fonction $\alpha(x)$, la valeur absolue, est dérivable au sens des distribution et que la dérivée au sens des distribution est représentée par la fonction "signe" $\frac{x}{|x|}$ :

(1.10) $\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \varphi \right\rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{x}{|x|}\, \varphi(x)\, dx\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]-1,+1[)$.

Donc $\alpha$ est une bonne candidate pour appartenir à $H^1(-1,+1)$. Comme la fonction "signe" est de carré intégrable (elle est bornée et l'intervalle $]-1,+1[$ est borné), la dérivée $\partial_x \alpha$ "appartient à $L^2(-1,+1)$" et $\alpha \in H^1(-1,+1)$. Au sens "moderne" des fonctions de $H^1(-1,+1)$, $\alpha$ est une fonction dérivable.

- Pour $\Omega = ]0,1[$ cette fois, posons

$$(1.11) \qquad u_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad 0<x<1, \ \alpha>0.$$

Cette fonction est singulière en 0 et elle appartient à $L^2(0,1)$ lorsque $2\alpha \leq 1$, ie $\alpha < \frac{1}{2}$, ce que nous supposons dans la suite de ce paragraphe. Calculons la dérivée $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}$ au sens des distributions. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$. Elle est très régulière à support compact. Donc il existe $\alpha, \beta$ tels que $0<\alpha<\beta<1$ et $\varphi(x) \equiv 0$ si $x \leq \alpha$ ou $x \geq \beta$. Le choix des nombres $\alpha$ et $\beta$ dépend bien entendu de la fonction $\varphi$. On a :

$$\left\langle \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}, \varphi \right\rangle = -\int_0^1 u_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx \quad \text{par définition de } \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}$$

$$= -\int_\alpha^\beta u_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx \quad \text{car } \frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv 0 \text{ si } x \leq \alpha \text{ ou } \geq \beta.$$

$$= -\left[u_\alpha \varphi\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \left(-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\right)\varphi(x)\, dx \quad (\text{par parties !})$$

$$= -\int_0^1 \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\varphi(x)\, dx.$$

Donc la dérivée $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}$ au sens des distribution est <u>égale</u> à la dérivée classique $(u_\alpha)'(x)$. Or cette fonction appartient à $L^2(0,1)$ pour $2(\alpha+1) < 1$, ie $\alpha < -\frac{1}{2}$, ce qui contredit l'hypothèse $\alpha > 0$.

- Pour $\alpha > 0$, $u_\alpha \equiv 1/x^\alpha$ n'appartient pas à $H^1(0,1)$. Pour $\beta > \frac{1}{2}$, $u_{-\beta}(x) = x^\beta$ appartient à l'espace $H^1(0,1)$.

- Avec $n=2$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| < \frac{1}{2}\} \equiv B(0,\frac{1}{2})$, la fonction $l_\alpha(x)$ définie par

$$(1.12) \qquad l_\alpha(x) = (\log|x|)^\alpha \; , \; x \in B(0,\tfrac{1}{2})$$

appartient à $H^1(\Omega)$ pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. La preuve est laissée en exercice. De même pour $n \geqslant 3$ et $u_\alpha$ définie par l'extension naturelle de (1.11), à savoir $u_\alpha(x) = \left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha$, appartient à $H^1(\Omega)$, (avec $\Omega = B(0,1/2)$ comme plus haut) lorsque $\alpha < \frac{n}{2} - 1$. La preuve est aussi un exercice sur le calcul des intégrales doubles. Il est laissé au lecteur.

- Les exemples qui précèdent sont très instructifs sur les fonctions qui forment $H^1(\Omega)$ si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 2$. Du point de vue des valeurs <u>ponctuelles</u> $u(x)$, ces fonctions ont une limite <u>infinie</u> pour $x \to x_0 = 0$. Du point de vue moderne, ce sont des fonctions dérivables (!) comme les autres, car elles appartiennent à l'espace $H^1(\Omega)$. De plus, à partir d'une fonction $u$ qui présente une singularité en $x_0 = 0$, on peut former par sommation une fonction $v \in H^1(\Omega)$ qui présente une singularité en les points $x_j$ arbitraires. On introduit simplement une série $\alpha_j \geq 0$ de carré intégrable : $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty$ et on pose

(1-13) $$v(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, u(x - x_j), \quad u \in H^1(\Omega).$$

On peut établir sans difficulté (exercice !) que $v \in H^1(\Omega)$. La fonction $v$ a une infinité de singularités ($v \to \infty$) dans le domaine $\Omega$. Elle reste toutefois "une fonction dérivable" au sens moderne de l'espace de Sobolev.

## (2) Introduction au théorème de trace.

- Même si les fonctions de $H^1(\Omega)$ peuvent avoir des valeurs infinies (voir les exemples au paragraphe précédent), nous allons voir qu'elles ont un sens "sur le bord" $\partial\Omega$. Cette propriété n'est absolument pas triviale. En effet, avec la théorie "moderne" de l'intégration, on peut sans difficulté changer la valeur d'une fonction sur tout un ensemble infini "de mesure nulle", sans changer la fonction "elle même", i.e. la façon dont elle opère par exemple sur $\mathcal{D}(\Omega)$ :

(2-1) $$\langle u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\, \varphi(x) \, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

- Une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est d'ailleurs "une classe d'équivalence d'applications" égales partout sauf sur un ensemble de mesure nulle or si $\Omega$ est un ouvert à frontière régulière $\partial\Omega$, celle ci est de mesure nulle relativement à l'espace $\mathbb{R}^n$ où vit $\Omega$ : $\partial\Omega$ est formé de deux points (de mesure nulle !) si $\Omega$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\partial\Omega$ est une courbe régulière (fermée) si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, donc cette courbe peut être recouverte par une famille de boules ouvertes de $\mathbb{R}^2$ de surface totale arbitrairement petite. De même pour $\Omega$ inclus dans $\mathbb{R}^3$, la frontière $\partial\Omega$ est une <u>surface</u> de $\mathbb{R}^3$ qui est de mesure nulle relativement à la mesure des volumes qui caractérise l'étude de $\mathbb{R}^3$. Définir la valeur $u(x)$ pour $x \in \partial\Omega$ n'est donc pas naturel si $u$ est une fonction générale de l'espace $L^2(\Omega)$

- Pour avancer, nous avons besoin de deux propriétés. D'une part, on munit l'espace $H^1(\Omega)$ d'un <u>produit scalaire</u> :

(2.2) $\displaystyle (u,v)_1 \equiv \int_\Omega \Big[ uv + \sum_{j=1}^n (\partial_j u)(\partial_j v) \Big] dx, \quad u,v \in H^1(\Omega)$

produit scalaire qu'on peut noter à l'aide du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_0$ de $L^2(\Omega)$ :

(2.3) $\displaystyle (u,v)_0 \equiv \int_\Omega uv \, dx, \quad u,v \in L^2(\Omega)$

(2.4) $(u,v)_1 = (u,v)_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_0, \quad u,v \in H^1(\Omega),$

en utilisant pleinement le fait que $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial v}{\partial x_j}$ sont des fonctions de $L^2(\Omega)$ lorsque $u$ et $v$ appartiennent à $H^1(\Omega)$. On note aussi

(2.5) $(u,v)_1 = (u,v)_0 + (\nabla u, \nabla v)_0, \quad u,v \in H^1(\Omega)$

avec la notation $(\nabla u, \nabla v)_0$ pour $\sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_0$.

- De plus, la norme $\|\bullet\|_1$ associée au produit scalaire précédent, à savoir

(2.6) $\|u\|_1 \equiv \sqrt{(u,u)_1}, \quad u \in H^1(\Omega)$

fait de $H^1$ un espace normé <u>complet</u> (ou espace de Banach); on a donc la propriété que toute suite de Cauchy, dont les termes "se rapprochent de plus en plus les uns des autres" :

(2.7) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \geq N, \|u_p - u_q\|_1 < \varepsilon$

est en fait <u>convergente</u> vers un "point" (une fonction !) $u \in H^1(\Omega)$ :

(2.8) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \|u_p - u\|_1 < \varepsilon$

Cette propriété est tout à fait non triviale et est fondamentale pour "passer à la limite" et <u>démontrer</u> l'existence de solutions à une facultétude de problèmes issus des sciences de l'ingénieur

- Rappelons que la notion d'espace <u>complet</u> fonde la science mathématique nommée "analyse". En effet, à partir des nombres entiers et leurs quotients $p/q$ (les nombres rationnels formant le corps $\mathbb{Q}$), on forme la suite

$$(2\text{-}9) \qquad e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad , n \in \mathbb{N}$$

avec $k! = 1 \times 2 \times \dots \times k$ pour $k$ entier $\geqslant 1$ et $0! = 1$.
On peut montrer sans difficulté que $e_n$ est une <u>suite de Cauchy</u> dans le corps $\mathbb{Q}$, mais qu'elle ne peut avoir une limite $e \in \mathbb{Q}$, car alors son dénominateur serait plus grand que tout nombre entier $q \geqslant 1$. Il faut alors <u>construire</u> un cadre logique approprié pour donner un sens à $e = \sum_0^\infty 1/k!$ (nombre d'Euler) puis vérifier que ce cadre est cohérent, ie que toute suite de Cauchy dans ce nouvel ensemble de nombres (les réels, notés $\mathbb{R}$) est bien convergente. Cette conceptualisation fut l'œuvre de Dedekind, Cauchy, Gauss, Bolzano, Abel, ... dans la première moitié du 19° siècle.

- Muni de son produit scalaire $(\cdot,\cdot)$, défini à la relation (2.2), l'espace $H^1(\Omega)$ dispose d'une norme (relation (2.6)) qui en fait un espace <u>complet</u>.

Un tel espace est dit "espace de Hilbert". Bien qu'ayant en général une infinité de dimensions, on peut y faire de la géométrie comme dans l'espace "ordinaire" $\mathbb{R}^3$.

- Seconde propriété de l'espace $H^1$. Les fonctions régulières $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ (régulières jusqu'au bord!) forment un espace noté $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ lorsqu'elles sont une fois continuement dérivables au sens classique. Pour $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et $x \in \overline{\Omega}$, les nombres $v(x)$ et $\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)$ sont définis sans ambiguité : la fonction $v(\bullet)$ est continue et les dérivées partielles $\frac{\partial v}{\partial x_j}$ sont également continues comme applications de $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une belle propriété de l'espace $H^1(\Omega)$ est que ces fonctions classiques forment une partie dense : toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ peut être arbitrairement approchée par $\tilde{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ :

(2.10) $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists u_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \; \|u - u_\varepsilon\|_1 < \varepsilon .$

- Nous illustrons cette propriété de densité (2.10) pour le cas de la valeur absolue $\alpha(x)$ qui n'est pas dérivable au sens classique mais appartient à l'espace $H^1(-1,+1)$ (voir la relation (1.10)). Nous posons

(2.11) $$\alpha_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| , & |x| \geq \varepsilon \\ \dfrac{x^2}{2\varepsilon} + \dfrac{\varepsilon}{2} , & |x| \leq \varepsilon \end{cases} \quad , \quad \varepsilon > 0 ,$$

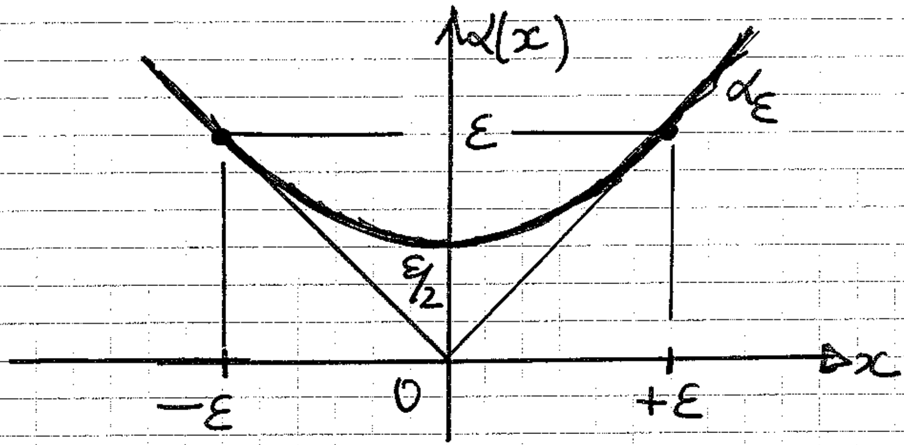


Figure 1. Approximation de $\alpha(x) = |x|$ par $\alpha_\varepsilon$ régulière.

illustré à la figure 1. On établit sans peine que la fonction $\alpha_\varepsilon$ est de classe $\mathcal{C}^1$, i.e. $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{C}^1([-1,1])$ puisque $\alpha_\varepsilon$ est clairement continue et que $\alpha'_\varepsilon$, défini classiquement pour $x \neq \pm\varepsilon$ se raccorde bien lorsque $x \to -\varepsilon$ à $-1$ et à $+1$ si $x \to \varepsilon$. [$\alpha'_\varepsilon(x) = \frac{x}{\varepsilon}$ si $|x| \leq \varepsilon$, qui vaut $-1$ pour $x = -\varepsilon$, $+1$ pour $x = +\varepsilon$].

- On vérifie que $\alpha_\varepsilon \to \alpha$ dans $H^1(-1,+1)$. Pour cela, on calcule la différence $\|\alpha - \alpha_\varepsilon\|_1^2$ ; on a

$$\|\alpha - \alpha_\varepsilon\|_1^2 = \int_{-1}^{+1} |\alpha - \alpha_\varepsilon|^2 dx + \int_{-1}^{+1} \left|\frac{d}{dx}(\alpha - \alpha_\varepsilon)\right|^2 dx$$

$$= \int_{|x|<\varepsilon} \left(|\alpha - \alpha_\varepsilon|^2 + \left|\frac{d}{dx}(\alpha - \alpha_\varepsilon)\right|^2\right) dx$$

car $\alpha_\varepsilon \equiv \alpha$ si $|x| > \varepsilon$

$$\leq 2\varepsilon(\varepsilon^2 + 1)$$ car $|\alpha - \alpha_\varepsilon| \leq \varepsilon$ si $|x| < \varepsilon$ et

$|\alpha' - \alpha'_\varepsilon| < 1$ si $|x| \leq \varepsilon$. Donc $\|\alpha - \alpha_\varepsilon\|_1$ est arbitrairement petit et la propriété (2.10) est satisfaite dans ce cas particulier

• Nous établissons maintenant une inéquation valable dans un cas particulier. Soit $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$ (figure 2) Nous cherchons à contrôler la "trace" $u(x,0)$ sur la partie du bord $\partial\Omega$ composée du segment $[0,1] \times \{0\}$, sachant que les autres cas sont analogues (figure 2)

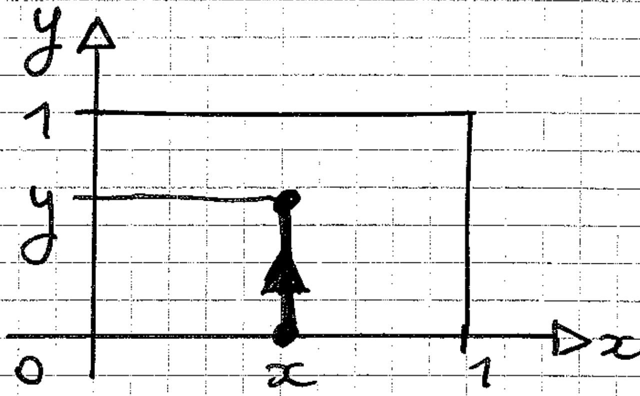


Figure 2 Intégration de $\frac{\partial u}{\partial y}$

Nous supposons dans un premier temps que $u$ est régulière. On a, pour $y \in [0,1]$ arbitraire (!)

$$u(x,0) = u(x,y) + \int_y^0 \frac{\partial u}{\partial x_2}(x,\eta)\, d\eta$$

Donc

$$|u(x,0)| \leqslant |u(x,y)| + \int_0^y \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x,\eta)\right| d\eta$$

$$\leqslant |u(x,y)| + \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x,\eta)\right| d\eta \quad \text{car } y \leqslant 1$$

(2.12) $\quad |u(x,0)| \leqslant |u(x,y)| + \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy} \quad , 0 \leqslant y \leqslant 1$

compte tenu de l'inégalité de Cauchy Schwarz.

on applique ensuite l'inégalité

$$(2.13) \quad (a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2) \;, \quad a,b \in \mathbb{R}$$

puis on intègre par rapport à $y \in [0,1]$. On en déduit

$$|u(x,0)|^2 \leqslant 2\left( \int_0^1 |u(x,y)|^2 \, dy + \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right|^2 dy \right).$$

Puis on intègre l'inégalité précédente pour $x \in [0,1]$ et on majore $\iint dx\,dy \left(|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right)$ par la norme $H^1$, c'est à dire $\iint dx\,dy \left(|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2\right)$.
On a donc

$$(2.14) \quad \int_0^1 |u(x,0)|^2 \, dx \leqslant 2 \, \|u\|^2_{1,\Omega} \;, \quad \Omega = ]0,1[^2, \; u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$$

- L'inégalité (2.14) montre que la norme $L^2$ des valeurs de $u$ sur le bord $\partial\Omega$, de la "trace" de $u$ sur le bord $\partial\Omega$, est majorée par une constante fois (qui vaut ici $2\sqrt{2}$, d'accord?) la norme $H^1$ :

$$(2.15) \quad \exists C > 0, \; \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \; \|\gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C \, \|u\|_{1,\Omega} \;,$$

ce quel que soit $u$, avec une constante $C$ qui ne dépend <u>pas</u> de $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ mais seulement du domaine $\Omega$. En fait, la relation (2.15) est très générale et reste vraie dès que $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière.

- Jointe aux propriétés précédentes, l'estimation (2.15) permet de définir la "valeur au bord", la trace $\gamma u$ de $u$ sur le bord du domaine $\Omega$, sans ambiguïté. De plus

(2.16) $\quad (\gamma u)(x) = u(x), \; x \in \partial\Omega, \; u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

dès que $u$ est une fonction assez régulière.

- La preuve résulte essentiellement du fait que $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et que $L^2(\partial\Omega)$ est déjà un espace de Hilbert, ie est complet. Pour $u \in H^1(\Omega)$, on introduit une suite $u_k \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, telle que $u_k \to u$ dans $H^1$ (voir la propriété (2.8)) Comme $u_k$ converge vers $u \in H^1$, elle est elle-même de Cauchy dans $H^1$ et (2.7) a lieu. On déduit de (2.15) (et de la linéarité de la trace, opération de prendre la valeur au bord) que

$\|\gamma u_k - \gamma u_\ell\| \leqslant C \, \|u_k - u_\ell\|_1 \leqslant \varepsilon$ dès que $k$ et $\ell$ sont assez grands. Donc la suite des traces $(\gamma u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est elle-même de Cauchy dans l'espace $L^2(\partial\Omega)$. Donc elle converge vers $\overline{u} \in L^2(\partial\Omega)$ car cet espace est complet. On pose enfin $\gamma u = \overline{u}$ et on vérifie que si on choisit le représentant continu, $\overline{u}(x) = u(x)$ dès que $u$ est régulière.

• Dans le cas général, $(\gamma u)(x)$, défini presque partout sur le bord, doit être vu comme "la" limite des $u(y)$ pour $y \in \Omega$ tendant vers $x \in \partial\Omega$. L'existence d'une telle limite est le fait remarquable synthétisé sous le nom de "théorème de trace" :

(2.17) $\exists\, \gamma$ continue $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On peut préciser l'espace <u>d'arrivée</u> de la trace $\gamma$. C'est un espace strictement plus petit que $L^2(\partial\Omega)$, nommé (avec justifications qui ne seront pas détaillées dans le cadre de ce cours !) $H^{1/2}(\partial\Omega)$ :

(2.18) $\gamma$ est surjective $H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$.

On a un relèvement continu de $H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$

(2.19) $\exists\, R$ continu $H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$ /
$\gamma(Ru_0) = u_0$, $\forall u_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

(2.20) $\exists\, C > 0$, $/ \forall v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $\|Rv\|_{1,\Omega} \leq C \|v\|_{1/2,\partial\Omega}$

où $\|\cdot\|_{1/2,\partial\Omega}$ est la norme "naturelle" sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$, non précisée dans le cadre de ce cours. Ce qui compte, c'est simplement de savoir qu'un tel cadre conceptuel et <u>rigoureux</u> existe. L'ensemble des résultats qui précèdent sont l'œuvre du mathématicien Français Jacques Louis Lions dans les années 1960.

- L'intérêt de la trace, ou valeur au bord, est qu'on peut la manipuler comme les valeurs ponctuelles classiques. Ainsi, la formule d'intégration par parties (1.1), valable a priori pour $u, v$ dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, se généralise en

$$(2.21)\qquad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\,dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u \cdot \gamma v \; n_j\, d\sigma,\ u, v \in H^1(\Omega)$$

avec $u$ et $v$ quelconque dans $H^1(\Omega)$. Comme chacune des intégrales $\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\,dx$ et $\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx$ a un sens pour $u$ et $v$ dans $H^1$, il est cohérent que le second membre "tout intégré" $\int_{\partial\Omega} \gamma u \cdot \gamma v \cdot n_j\, d\sigma$ ait aussi un sens...

- Dernière définition. Si $\xi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, et $\lambda \in L^2(\partial\Omega)$, l'intégrale $\int_{\partial\Omega} \xi\lambda\, d\sigma$ est bien définie. Si $\lambda \in L^2(\partial\Omega)$ est fixé, l'application $H^{1/2}(\partial\Omega) \ni \xi \mapsto \int_{\partial\Omega} \xi\lambda\, d\sigma \in \mathbb{R}$ est linéaire et continue. On dit qu'elle définit un élément (noté $\lambda$) du <u>dual</u> $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ de l'espace $H^{1/2}$. On a donc naturellement

$$(2.22)\qquad H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega) \subset H^{-1/2}(\partial\Omega).$$

De façon générale, une application linéaire et continue $\lambda : H^{1/2}(\partial\Omega) \ni \xi \mapsto \langle \lambda, \xi \rangle \in \mathbb{R}$, ie telle que

$$(2.23)\qquad \exists C > 0,\ \forall \xi \in H^{1/2}(\partial\Omega),\quad |\langle \lambda, \xi\rangle| \leq C \|\xi\|_{1/2,\partial\Omega}$$

est dite appartenir à $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. On peut montrer qu'une telle forme est en général une <u>distribution</u> définie sur le bord $\partial\Omega$.

## (3) Espaces de Sobolev vectoriels

- Dans la suite, $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ à frontière régulière. L'adaptation au cas de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est facile. Elle est essentiellement laissée au lecteur à titre d'exercice. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs, on peut bien sûr considérer ses composantes $u_j : \Omega \to \mathbb{R}$, et $u = \sum_{j=1}^{3} u_j \, e_j$, avec $(e_j)_{1 \leq j \leq 3}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$. Le champ $u$ appartient à $(L^2(\Omega))^3$ si chacune de ses composantes est dans $L^2(\Omega)$. On a :

$$(3.1) \qquad \| u \|_{0,\Omega}^2 = \sum_{j=1}^{3} \| u_j \|_{0,\Omega}^2 .$$

- Si chacune des composantes $u_j$ appartient à l'espace $H^1(\Omega)$, <u>chaque</u> dérivée partielle $\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ est une fonction $\Omega \to \mathbb{R}$ qui est <u>de plus</u> de carré intégrable. On pose

$$(3.2) \qquad \| u \|_{1,\Omega}^2 = \sum_{j=1}^{3} \Big( \| u_j \|_0^2 + \sum_{k=1}^{3} \| \partial_k u_j \|_{0,\Omega}^2 \Big)$$

ou bien avec des notations plus compactes

$$(3.3) \qquad \| u \|_{1,\Omega}^2 = \| u \|_{0,\Omega}^2 + \| \nabla u \|_{0,\Omega}^2 .$$

on traite le champ de vecteurs de la même manière que le champ scalaire. Les composantes de Descartes sont effectivement adaptées à certains problèmes des sciences de l'ingénieur comme l'élasticité et la mécanique des structures.

- Pour d'autres applications comme la mécanique des fluides ou l'électromagnétisme, on ne dispose "naturellement" que de la divergence div u,

(3.4) $$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

du champ de vecteurs $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ou bien du rotationnel $\operatorname{rot} u = \sum_j (\operatorname{rot} u)_j \, e_j$

(3.5) $$(\operatorname{rot} u)_j = \sum_{kl} \varepsilon_{ijk} \, \partial_j u_l \, , \quad 1 \leq j \leq 3 .$$

- on introduit donc deux espaces $H(\operatorname{div}, \Omega)$ et $H(\operatorname{rot}, \Omega)$ pour lesquels les combinaisons linéaires de dérivées (au sens des distributions) proposées aux membres de droite des relations (3.4) et (3.5) sont effectivement des fonctions de $L^2(\Omega)$. Rappelons que si $u$ est un champ de vecteurs de $(L^2(\Omega))^3$, la divergence et le rotationnel de $u$ sont des distributions définies sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et $(\mathcal{D}(\Omega))^3$ respectivement par:

$$(3.6) \quad \langle \mathrm{div}\, u, \varphi \rangle = -\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$(3.7) \quad \langle (\mathrm{rot}\, u)_j, \psi \rangle = \sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} \int_\Omega u_k \frac{\partial \psi}{\partial x_l}\, dx, \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Si $u$ est régulière, on a bien

$$\langle (\mathrm{rot}\, u)_j, \psi \rangle = \sum_{k,l} \varepsilon_{jkl} \left[ -\int_\Omega (\partial_l u_k) \psi\, dx + \int_{\partial\Omega} u_k n_l \psi\, d\sigma \right]$$

$$= \sum_{k,l} \varepsilon_{jlk} \int_\Omega (\partial_l u_k) \psi\, dx$$

$$= \int_\Omega (\mathrm{rot}\, u)_j\, \psi\, dx,$$

ce qui montre la cohérence de la relation (3.7).

- L'espace $H(\mathrm{div}, \Omega)$ est par définition l'espace des champs de vecteurs $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ tels que $u \in (L^2(\Omega))^2$ (chaque composante $u_j$ de $u$ appartient à $L^2(\Omega)$) et la divergence $\mathrm{div}\, u$, définie comme distribution par la relation (3.6), est représentée par une fonction $d(x)$, avec de plus $d \in L^2(\Omega)$ :

$$(3.8) \quad \exists d \in L^2(\Omega),\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ -\sum_j \int_\Omega u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = \int_\Omega d(x) \varphi\, dx$$

Dans la suite la fonction $d(x)$ est notée plus naturellement $\mathrm{div}\, u$. On pose

$$(3.9) \quad \| u \|^2_{\mathrm{div},\Omega} = \sum_{j=1}^{3} \| u_j \|^2_{0,\Omega} + \int_\Omega |\mathrm{div}\, u|^2\, dx$$

pour $u \in H(\mathrm{div}, \Omega)$. De façon plus générale, le produit scalaire $(u,v)_{\mathrm{div},\Omega}$ de deux fonctions $u$ et $v$ de $H(\mathrm{div},\Omega)$ est défini par

$$(3.10)\quad (u,v)_{\mathrm{div},\Omega} = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega u_j\, v_j\, dx + \int_\Omega (\mathrm{div}\, u)(\mathrm{div}\, v)\, dx, \qquad u, v \in H(\mathrm{div},\Omega)$$

Muni du produit scalaire $(\bullet,\bullet)_{\mathrm{div},\Omega}$, l'espace de Sobolev vectoriel $H(\mathrm{div},\Omega)$ est complet. C'est un espace de Hilbert. On a la double inclusion

$$(3.11)\qquad (H^1(\Omega))^3 \subsetneq H(\mathrm{div},\Omega) \subsetneq (L^2(\Omega))^3 .$$

- La définition de l'espace $H(\mathrm{rot},\Omega)$ est analogue. Si $u \in H(\mathrm{rot},\Omega)$, chaque composante $u_j$ appartient à $L^2(\Omega)$ et le vecteur rot $u$, dont chaque composante $(\mathrm{rot}\, u)_j$ est définie au sens des distributions via la relation (3.7) est représentée par une fonction $r_j(x)$, avec $r_j \in L^2(\Omega)$:

$$(3.12)\quad \exists r_j \in L^2(\Omega),\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \sum_{kl} \varepsilon_{jkl} \int_\Omega u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}\, dx = \int_\Omega r_j\, \varphi(x)\, dx$$

Bien entendu, $r_j$ est noté $(\mathrm{rot}\, u)_j$ dans la suite. On pose, pour $u \in H(\mathrm{rot},\Omega)$:

$$(3.13)\quad \|u\|^2_{\mathrm{rot},\Omega} = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |u_j|^2 dx + \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |(\mathrm{rot}\, u)_j|^2 dx .$$

Le produit scalaire $(u,v)_{rot,\Omega}$ de deux fonctions $u$ et $v \in H(rot,\Omega)$ est défini par

$$(3.14)\quad (u,v)_{rot,\Omega} = \int_\Omega u \cdot v \, dx + \int_\Omega rot\, u \bullet rot\, v \, dx \,, \quad u,v \in H(rot,\Omega)$$

où $a \bullet b$ désigne le produit scalaire usuel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Muni de ce produit scalaire, l'espace $H(rot,\Omega)$ est complet et c'est un espace de Hilbert.

On a une double inclusion analogue à (3.11) :

$$(3.15)\quad (H^1(\Omega))^3 \subsetneq H(rot,\Omega) \subsetneq (L^2(\Omega))^3 .$$

FD, 31 oct 05.