le cnam

Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

Cours 05

Espaces de Sobolev vectoriels (iii)

Problème de Dirichlet homogène

Problème de Dirichlet non homogène

Problème de Neumann

Retour aux champs de vecteurs

François Dubois

novembre 2005, 22 pages

Ch (II) Espaces de Sobolev vectoriels (iii)

Cours du 2 nov 2005

(1) Problème de Dirichlet homogène

- On désigne par Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ assez régulière. On se donne un chargement $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et on suppose

(1.1) $\quad f \in L^2(\Omega)$

pour fixer les idées. On cherche $u : \Omega \to \mathbb{R}$ solution du problème de Poisson

(1.2) $\quad - \Delta u = f \quad \Omega$

(1.3) $\quad u = 0 \quad \partial\Omega$.

Rappelons que le problème (1.2)(1.3) est fondamental en électrostatique et en gravitation.

- Nous allons transformer le problème (1.2) en lui donnant une <u>formulation variationnelle</u>. Dans la formulation "équation aux dérivées partielles" (1.2), l'égalité $-\Delta u(x) = f(x)$ est valable presque partout pour $x \in \Omega$. Avec la formulation variationnelle, nous disposerons d'une égalité valable quelle que soit la fonction test v. Le calcul est simple. On multiplie les deux membres de (1.2) par une fonction test $v(x)$ et on intègre par parties. On a donc

(1.4) $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v \, d\sigma = \int_\Omega f v \, dx, \ \forall v.$

- Afin de préciser la formulation, on fait le choix que v vérifie la même condition à la limite que u. On pose pour cela :

(1.5) $H^1_0(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega), \ \gamma v = 0 \}$.

Alors la condition (1.3) est "essentiellement" prise en compte via l'appartenance

(1.6) $u \in H^1_0(\Omega)$

Si on suppose $v \in H^1_0(\Omega)$ dans la relation (1.4), le terme de bord $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma$ (qu'on devrait écrire $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} (\gamma v) d\sigma$) est nul car $v = 0$ sur le bord. On en déduit

(1.7) $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$

On dit que la formulation (1.6)(1.7) est une formulation variationnelle du problème de Poisson (1.2)(1.3).

- On dispose d'un cadre abstrait qui va nous montrer que le problème (1.6)(1.7) a une solution unique. Mais d'abord, on remarque qu'avec (1.6)(1.7), on a gagné un "cran" dans l'ordre de dérivation. Si $-\Delta u = f$ fait intervenir les dérivées secondes de la fonction u, la condition $u \in H_0^1$ et la relation (1.7) ne demandent que de savoir calculer les dérivées premières de cette même fonction u et de la fonction test v. D'ailleurs, si (1.7) a lieu, c'est en particulier le cas pour $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on a alors

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla \varphi \, dx \equiv - \langle \Delta u, \varphi \rangle \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

avec Δu considéré au sens des distributions. La relation (1.7) entraîne donc

(1.8) $\qquad -\Delta u = f$ au sens des distributions,

qui est distinct de (1.2) mais coïncide avec (1.2) dès que u est assez régulière. Nous concluons que si u est solution assez régulière de la formulation variationnelle (1.6)(1.7), alors elle est solution de (1.2)-(1.3). Mais la régularité n'est pas toujours réalisée et il faut parfois se contenter de la condition (1.8).

- afin de développer le cadre abstrait, on pose

(1.9) $\qquad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega)$

(1.10) $\quad \langle b, v\rangle = \int_\Omega f v\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Si on désigne par la lettre H l'espace $H_0^1(\Omega)$, les relations (1.6)(1.7) prennent la forme générale

(1.11) $\begin{cases} u \in H \\ a(u,v) = \langle b, v\rangle, \ \forall v \in H \end{cases}$

- Une formulation variationnelle telle que (1.11) a une solution unique $u \in H$ lorsque les conditions suivantes sont réalisées ; c'est le théorème de Lax-Milgram-Vishik.

(1.12) H est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_H$ et de la norme $\|\cdot\|_H$

(1.13) $a(\cdot,\cdot)$ est bilinéaire (symétrique) continue

La continuité de la forme bilinéaire exprime qu'il existe $M > 0$ tel que

(1.14) $\quad |a(u,v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H \quad , \ \forall u, v \in H$

(1.15) b est une forme linéaire $H \to \mathbb{R}$ continue

La continuité de b (on écrit $b \in H'$, dual de H) s'écrit aisément l'existence de $C > 0$ de sorte que

(1.16) $\quad |\langle b, v\rangle| \leq C \|v\|_H , \quad \forall v \in H$.

Enfin la condition d'ellipticité, ou de coercivité de la forme linéaire $a(\cdot,\cdot)$ suppose qu'il existe $\alpha > 0$ de sorte que $\frac{1}{\alpha} a(\cdot,\cdot)$ majore la norme dans H:

(1.17) $\exists \alpha > 0, \forall v \in H, \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_H^2 .$

- Lorsque les conditions (1.12), (1.13), (1.15) et (1.17) sont réalisées, le problème (1.11) a une solution unique $u \in H$. La solution u dépend d'ailleurs continûment de la donnée $b \in H'$. On introduit $\|b\|$ par

(1.18) $\quad \|b\| = \sup \{ |< b,v >| , \|v\|_H \leq 1 \}$

alors $< b,v > \leq \|b\| \, \|v\|_H$ pour tout $v \in H$. En prenant $v = u$ dans la formulation (1.11), on a, compte tenu de l'ellipticité (1.17):

(1.19) $\alpha \|u\|_H^2 \leq a(u,u) = < b, u > \leq \|b\| \, \|u\|_H .$

Dans la relation (1.19), ou bien $\|u\|_H = 0$ et alors $\|u\|_H = 0 \leq \frac{1}{\alpha}\|b\|$, ou bien $\|u\|_H \neq 0$ et on peut diviser les deux membres de l'inégalité $\alpha \|u\|_H^2 \leq \|b\| \, \|u\|_H$ par $\|u\|_H$ et il vient

(1.20) $\quad \|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|b\|$

valable dans tous les cas.

- La preuve du résultat de Lax Milgram Vishik repose sur le théorème de Riesz qui énonce que dans un espace de Hilbert H, toute forme linéaire continue b est représentée de façon unique par un vecteur $\varphi \in H$:

$$(1.21) \quad \exists ! \varphi \in H, \ \forall v \in H, \ \langle b, v \rangle = (\varphi, v)_H .$$

- L'astuce consiste à changer de produit scalaire sur l'espace H, au profit d'un nouveau produit scalaire. On pose

$$(1.22) \quad ((u,v)) = a(u,v) \quad , \quad |||v||| = \sqrt{a(v,v)}$$

Alors $(H, ((\cdot,\cdot)))$ est un espace de Hilbert et les normes $\|\cdot\|_H$ et $|||\cdot|||$ sont équivalentes. On a en effet

$$(1.23) \quad \sqrt{\alpha} \ \|v\|_H \leq \sqrt{a(v,v)} \leq \sqrt{M} \ \|v\|_H .$$

Donc les topologies $(H, \|\cdot\|_H)$ et $(H, |||\cdot|||)$ sont identiques. En particulier, b continue pour la topologie initiale l'est encore pour la topologie associée à la nouvelle norme. On a en effet

$$\langle b, v \rangle \leq C \|v\|_H \leq \frac{C}{\sqrt{\alpha}} |||v|||$$

et b est continue. On applique le théorème de Riesz dans H muni du produit scalaire $((\cdot,\cdot))$. On a donc

$$(1.24) \quad \exists ! u \in H, \forall v \in H, \quad \langle b, v \rangle = ((u,v)) ,$$

qui exprime, compte tenu de la définition (1.22), que (1.11) a une solution unique.

- Le problème de Dirichlet étant mis sous la forme (1.11), il reste à vérifier que les hypothèses (1.12), (1.13), (1.15) et (1.17) sont effectivement satisfaites. Bien entendu, l'espace H^1_0 est un sous-espace de H^1, muni du produit scalaire

$$(1.25) \quad (u,v)_1 = \int_\Omega (uv + \nabla u . \nabla v)\,dx \, .$$

Le seul point non banal est de savoir si H^1_0 est complet. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans H^1_0. Alors elle est de Cauchy dans H^1 et converge vers $u \in H^1$ car H^1 est un Hilbert, donc est complet. Mais $\gamma u_k = 0$ pour tout k car $u_k \in H^1_0$. Or γ est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Donc $\gamma u = 0$ par continuité, ce qui exprime que $u \in H^1_0(\Omega)$ et montre la propriété. H^1_0, sous-espace fermé d'un espace topologique complet, est lui-même complet.

- La continuité de $a(u,v) \equiv \int_\Omega \nabla u . \nabla v\, dx$ est immédiate puisque

$$(1.26) \quad |a(u,v)| \leq \int_\Omega |\nabla u|\,|\nabla v|\,dx \leq \|\nabla u\|_0 \, \|\nabla v\|_0 \leq \|u\|_1 \|v\|_1$$

De même,

$$(1.27) \quad |\langle b,v\rangle| \leq \int_\Omega |f|\,|v|\,dx \leq \|f\|_0 \|v\|_0 \leq \|f\|_0 \, \|v\|_1$$

et b est continue. Reste l'ellipticité, propriété la plus délicate. Elle s'appuie sur le théorème de Rellich qui énonce que lorsque Ω est borné, l'injection $H^1(\Omega) \ni v \mapsto v \in L^2(\Omega)$ est compacte. Ceci signifie que de toute suite bornée u_k dans H^1 ($\exists C, \forall k, \|u_k\|_1 \leq C$), on peut extraire une sous suite $u_{k'}$ convergent dans L^2 vers $u \in L^2$: $\exists u \in L^2, u_{k'} \to u$ si $k' \to \infty$.

- Par exemple, la suite u_k de fonctions définie sur $\Omega =]0,1[$ par

$$(1.28) \qquad u_k(x) = \begin{cases} kx, & x \leq 1/k^2 \\ \frac{1}{k} & x \geq \frac{1}{k^2} \end{cases}$$

vérifie $\|u_k'\|_0^2 = \int_0^{1/k^2} k^2\, dx = 1$, $\|u_k\|_0 \leq 1/k$.

Elle est bien dans $H^1(0,1)$ car toute fonction u_k est continue. On a :

$$(1.29) \qquad 1 \leq \|u_k\|_1 \leq \sqrt{2} \qquad k \geq 1$$

donc u_k ne converge pas vers 0 dans H^1. Pourtant, $u_k \to 0$ clairement dans $L^2(0,1)$ puisque $\|u_k\|_0 \leq 1/k$.

- Ce théorème de Rellich permet de démontrer l'inégalité de Poincaré :

$$(1.30) \qquad \exists P > 0, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \ \|v\|_0 \leq P \|\nabla v\|_0 .$$

Si v est nulle au bord, on contrôle sa moyenne quadratique grâce à la moyenne quadratique de son gradient. Si la propriété (1.30) est en défaut, $\forall k \geq 1$, $\exists v_k \in H_0^1(\Omega)$, $\|v_k\|_0 > k \,\|\nabla v_k\|_0$. On pose alors

(1.31) $$\varphi_k = \frac{1}{\|v_k\|_0}\, v_k, \quad k \geq 1$$

puisque $\|v_k\|_0 > 0$ grâce à l'inégalité stricte. On a alors

$$\nabla \varphi_k = \frac{1}{\|v_k\|_0} \nabla v_k, \quad \text{donc} \quad \|\nabla \varphi_k\|_0 = \frac{1}{\|v_k\|_0} \|\nabla v_k\|_0 \leq \frac{1}{k}.$$

et on a

(1.32) $$\|\varphi_k\|_0 = 1, \quad \|\nabla \varphi_k\|_0 \leq \frac{1}{k}.$$

* Par suite, la famille $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ est bornée dans H^1. Donc elle converge vers $\varphi \in L^2$ dans L^2 qui vérifie bien entendu

(1.33) $$\|\varphi\|_0 = 1$$

car la norme est une application continue sur l'espace L^2. Mais si on introduit une fonction test ψ, on a :

$$\langle \nabla \varphi_k, \psi \rangle = -\int_\Omega \varphi_k \nabla \psi \to -\int_\Omega \varphi \nabla \psi = -\langle \nabla \varphi, \psi \rangle$$

$\downarrow$

0 si $k \nearrow \infty$ compte tenu de (1.32). Donc

(1.34) $$|\langle \nabla \varphi, \psi \rangle| \leq \frac{1}{k} \|\psi\|_0 \quad \forall k, \ \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et $\nabla \varphi$ existe comme fonction ; c'est la fonction nulle ! On a mieux que $\varphi_k \to \varphi$ dans L^2. On a

$\nabla \varphi_k \to 0$ dans L^2, i.e. $\varphi_k \to \varphi$ dans H^1 et $\nabla \varphi = 0$. Donc φ est constante et cette constante est non nulle compte tenu de (1.33). Mais $0 = \gamma \varphi_k \to \gamma \varphi$ et $\varphi \in H_0^1$, est nulle au bord! D'où la contradiction. L'inégalité de Poincaré (1.30) a donc lieu.

- On peut maintenant montrer que la forme $a(u,v)$ définie en (1.9) est elliptique sur l'espace $H_0^1(\Omega)$:

(1.35) $\exists \alpha > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq \alpha \|v\|_1^2$.

On a en effet:

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2P^2} \int_\Omega |v|^2 dx \quad \text{cf (1.30)}$$

$$\geq \frac{1}{2} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{P^2}\right) \left(\|\nabla v\|_0^2 + \|v\|_0^2\right)$$

$$\geq \alpha \|v\|_1^2, \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{Min}\left(1, \frac{1}{P^2}\right).$$

Donc on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram-Vishik au problème de Dirichlet écrit sous forme variationnelle (1.6)(1.7). En particulier, il existe un $u \in H_0^1(\Omega)$ unique solution de (1.7). Il vérifie aussi (1.8), i.e. $-\Delta u = f$ au sens des distributions.

(2) Problème de Dirichlet non homogène.

- Nous étudions maintenant le cas du problème de Poisson dans l'ouvert Ω :

$$(2.1) \qquad -\Delta u = f \quad \Omega$$

avec une condition de Dirichlet non homogène u_0 :

$$(2.2) \qquad u = u_0 \quad \partial\Omega \,.$$

L'idée est de se ramener au cas homogène étudié au paragraphe 1 de cette leçon. On suppose pour cela que

$$(2.3) \qquad u_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega) \,,$$

ce qui peut être parfois limitant dans la pratique.

- Nous avons vu qu'alors il existe un relèvement continu de u_0 par $R u_0 = \xi_0 \in H^1(\Omega)$:

$$(2.4) \qquad H^{1/2}(\partial\Omega) \ni u_0 \longmapsto R u_0 = \xi_0 \in H^1(\Omega) \,, \quad \gamma\xi_0 = u_0 \,;$$

$$(2.5) \qquad \| \xi_0 \|_{1,\Omega} \leq C \cdot \| u_0 \|_{1/2,\partial\Omega} \,.$$

Nous cherchons alors u sous la forme

$$(2.6) \qquad u = \xi_0 + w \,, \quad u \in H^1(\Omega)$$

La condition (2.2) s'écrit $\gamma u = u_0$ et comme $\gamma\xi = u_0$ également, on déduit de l'égalité des traces et de la linéarité de γ :

$$(2.7) \qquad \gamma w = 0 \quad \text{c'est à dire } w \in H_0^1(\Omega).$$

- Ce changement de fonction inconnue étant effectué (ξ_0 est maintenant une donnée, et $w \in H_0^1$ est inconnu), on multiplie encore l'équation (2.1) par $v \in H_0^1(\Omega)$, donc nulle au bord, et il vient

$$(2.8) \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad , \quad \forall v \in H_0^1$$

comme précédemment. Compte tenu de (2.6), on cherche donc w satisfaisant (2.7) tel que

$$(2.9) \qquad \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx - \int_\Omega \nabla \xi_0 \cdot \nabla v \, dx, \ \forall v \in H_0^1$$

- Le problème (2.7)(2.9) est encore de la forme (1.11) avec le <u>même</u> espace $H = H_0^1(\Omega)$, la <u>même</u> forme bilinéaire $a(w,v) = \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx$. Seule la forme linéaire b, le "chargement" a changé. Il s'écrit maintenant

$$(2.10) \quad \langle b, v \rangle = \int_\Omega f v \, dx - \int_\Omega \nabla \xi_0 \cdot \nabla v \, dx, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

Il s'agit bien d'une forme linéaire <u>continue</u> sur H_0^1. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\langle b, v \rangle| \leqslant \|f\|_0 \|v\|_0 + \|\nabla \xi_0\|_0 \|\nabla v\|_0 \leqslant (\|f\|_0 + \|\xi_0\|_1) \|v\|_1$$

$$(2.11) \qquad |\langle b, v \rangle| \leqslant \left(\|f\|_0 + C \|u_0\|_{1/2} \right) \|v\|_1$$

qui prend en compte la norme, la "taille" des données $f \in L^2$ et $u_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Le problème (2.7)(2.9) a donc une solution unique $w \in H_0^1(\Omega)$ et par voie de conséquence, le problème de Dirichlet initial (2.1)(2.2) a une unique "solution variationnelle" $u \in H^1(\Omega)$.

③ Problème de Neumann

- Au lieu de se donner u sur le bord, on se donne la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$. Le problème de Neumann pour le laplacien s'écrit donc

$$(3.1) \qquad -\Delta u = f \qquad \Omega$$

$$(3.2) \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = g \qquad \partial\Omega$$

On suppose toujours que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. On le suppose aussi "connexe", c'est à dire "d'un seul tenant". Une première remarque est que si on prend $f = 0$ et $g = 0$, alors la fonction $u(x) \equiv 1$ solution du problème (3.1)(3.2). En effet

$$(3.3) \qquad -\Delta(1) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial n}(1) = 0$$

Il n'y a donc aucun espoir d'obtenir l'unicité pour le problème (3.1)(3.2), au moins dans sa lecture classique. On utilise donc une définition des fonctions

u "à une constante près". Pour $u \in H^1(\Omega)$, on pose

(3.4) $\quad \dot{u} = \{u + c,\ c \in \mathbb{R}\} \quad \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$

On se permet de rajouter à u une constante arbitraire sans changer la (classe de) fonction $\dot{u}$. L'espace ainsi construit se note $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, qu'on nomme "H^1, modulo les constantes".

- On multiplie l'égalité (3.1) par une fonction test v et on intègre par parties dans Ω. Il vient

(3.5) $$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g\, v \, d\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

puisque $\frac{\partial u}{\partial n} = g$, on remplace ce terme par g, en conservant maintenant ce terme de bord qui vient donc "naturellement" dans la formulation. Si dans la relation (3.5), on prend $v \equiv 1$, le terme de gauche est nul car $\nabla v \equiv 0$. On a donc une condition nécessaire sur le chargement (f, g) pour que (3.5) ait un sens :

(3.6) $$\int_\Omega f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0$$

C'est aussi la relation qu'on obtient en intégrant la relation (3.1) dans Ω :

$$\int_\Omega f \, dx = \int_\Omega - \Delta u \, dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = -\int_\Omega g \, d\sigma$$

On suppose donc que (3.6) a lieu, sinon le problème (3.1)(3.2) ne peut avoir de solution. Mais alors la relation (3.5) reste vraie si on ajoute à v une constante c arbitraire :

$$(3.7)\quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v+c)\,dx = \int_\Omega f(v+c)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(v+c)\,d\sigma,\ \forall v \in H^1$$

ce qu'on exprime par

$$(3.8)\quad \int_\Omega \nabla\dot{u} \cdot \nabla\dot{v}\,dx = \int_\Omega f\dot{v}\,dx + \int_{\partial\Omega} g\dot{v}\,d\sigma,\ \forall \dot{v} \in H^1/\mathbb{R}$$

En effet $\nabla\dot{u} = \nabla u$ car la constante disparaît dans la dérivation.

- On vient de proposer une formulation variationnelle (3.4)(3.8) posée dans $H = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, avec $a(\dot{u},\dot{v}) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$ et $\langle b, \dot{v}\rangle = \int_\Omega f v\,dx + \int_{\partial\Omega} g v\,d\sigma$ puisque toutes ces données sont inchangées si on rajoute une constante arbitraire à u ou v. Il convient maintenant de définir une <u>structure</u> sur $H^1/\mathbb{R}$. Muni de la "norme quotient"

$$(3.9)\quad \|\dot{v}\|_{H^1/\mathbb{R}} = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|v+c\|_{1,\Omega},\quad v \in \dot{v}$$

les formes bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ et linéaire $b(\cdot)$ sont naturellement continues. Il faut maintenant montrer que $a(\dot{u},\dot{v})$ définit effectivement un produit scalaire sur $H^1/\mathbb{R}$, avec une norme associée <u>équivalente</u> à la norme quotient classique introduite en (3.9), ce qui garantir l'ellipticité.

- Le lemme technique intermédiaire consiste à montrer que l'expression $[v]$ définie par

$$(3.10) \quad [v]_{H^1} = \sqrt{\left(\int_\Omega v\,dx\right)^2 + \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx}$$

définit, quand Ω est un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^n$, une norme équivalente à la norme H^1:

$$(3.11) \quad \exists\, p, q > 0,\ \forall v \in H^1(\Omega),\quad p\|v\|_1 \leqslant [v]_{H^1} \leqslant q\,\|v\|_1 .$$

La preuve de ce résultat est une conséquence de la compacité de l'injection $H^1 \hookrightarrow L^2$ (théorème de Rellich); elle s'obtient de façon analogue à l'inégalité de Poincaré. La preuve est laissée au lecteur à titre d'exercice.

- Considérons maintenant v de la forme $\dot{v} + c$, i.e. v à une constante près dans les inégalités (3.11). Prenons l'infimum de ces expressions pour $c \in \mathbb{R}$ arbitraire. Il vient, compte tenu de (3.9):

$$(3.12) \quad \exists\, p, q > 0,\ \forall \dot{v} \in H^1/\mathbb{R},\quad p\|\dot{v}\|_{H^1/\mathbb{R}} \leqslant \inf_c [v+c]_{H^1} \leqslant q\,\|\dot{v}\|_{H^1/\mathbb{R}}$$

or $\inf_c [v+c]_{H^1} = (a(\dot{v},\dot{v}))^{1/2}$ clairement car il suffit d'annuler le terme $\int_\Omega (v+c)\,dx$ en prenant $c = -\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v\,dx$. On a donc

(3.13) $\exists p, q > 0,\ \forall \dot{v} \in H^1/\mathbb{R},\ p \|\dot{v}\|_{H^1/\mathbb{R}} \leq (a(\dot{v}, \dot{v}))^{1/2} \leq q \|\dot{v}\|_{H^1/\mathbb{R}}$

ce qui montre que la norme associée au produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$ sur $H^1/\mathbb{R}$ est équivalente à la norme quotient classique, donc que $a(\cdot,\cdot)$ est coercive sur l'espace $H^1/\mathbb{R}$.

- On peut donc appliquer le théorème de Lax, Milgram et Vishik : la formulation variationnelle (3.4)(3.8) a une solution unique $\dot{u} \in H^1/\mathbb{R}$. Si la condition de compatibilité entre les données (3.6) est réalisée, le problème de Neumann (3.1)(3.2) écrit sous forme variationnelle a une solution unique à une constante additive près.

(4) Retour aux champs de vecteurs

- Nous terminons cette leçon par une remarque fondamentale sur les interfaces. Soit Ω composé de Ω_1 et Ω_2, avec $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} = \Omega$, $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \Gamma$

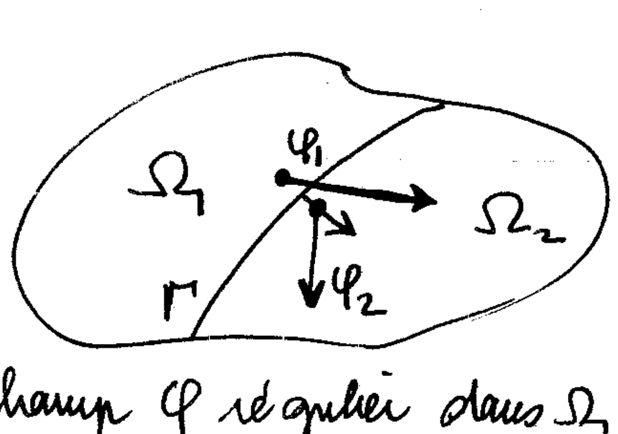

Figure 1 champ φ régulier dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$, appartenant à $H(\mathrm{div}, \Omega)$; $[\varphi \cdot n] = 0$.

On se donne un champ de vecteurs $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tel que

(4.1) $$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in \Omega_1 \\ \varphi_2(x), & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

où φ_1 et φ_2 sont des champs réguliers dans $\overline{\Omega_1}$ et $\overline{\Omega_2}$ respectivement. On se demande à quelle condition le champ global φ appartient à l'espace $H(\mathrm{div}, \Omega)$. (voir la figure 1).

Prop. (1) <u>Continuité de la composante normale</u>

On désigne par n la normale pointant de Ω_1 vers Ω_2. Alors $\varphi \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ dans les conditions précédentes si et seulement si le saut

(4.2) $$[\varphi \cdot n] \equiv (\varphi_2 - \varphi_1) \cdot n, \quad x \in \Gamma$$

est <u>nul</u> en tout point de Γ :

(4.3) $$[\varphi \cdot n] = 0 \qquad \forall x \in \Gamma$$

<u>Preuve de la proposition (1)</u>

- On écrit que $\mathrm{div}\,\varphi$, à prendre au sens des distributions, est effectivement une fonction. On, étant donné une fonction test ψ, on a par définition

$$\langle \mathrm{div}\,\varphi, \psi \rangle = -\int_\Omega \varphi \, \nabla\psi \, dx$$

$$= -\int_{\Omega_1} \varphi_1 \nabla \psi \, dx - \int_{\Omega_2} \varphi_2 \cdot \nabla \psi \, dx$$

$$= -\int_{\Omega_1} (\operatorname{div}\varphi_1)\psi - \int_{\Omega_2} (\operatorname{div}\varphi_2)\psi - \int_{\partial\Omega_1} (\varphi_1 \cdot \tilde{n}_1)\psi \, d\sigma - \int_{\partial\Omega_2} (\varphi_2 \cdot \tilde{n}_2)\psi \, d\sigma$$

où $\tilde{n}_j$ désigne la normale extérieure à Ω_j. Pour les intégrales sur $\partial\Omega_j$, la composante sur $\partial\Omega$ est nulle car $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est nulle au bord de Ω. Il ne reste donc que la composante sur Γ, où $\tilde{n}_1 = n = -\tilde{n}_2$. On a donc eu

$$(4.4) \quad \langle \operatorname{div}\varphi, \psi \rangle = -\int_{\Omega_1} (\operatorname{div}\varphi_1)\psi \, dx - \int_{\Omega_2} (\operatorname{div}\varphi_2)\psi \, dx + \int_{\Gamma} (\varphi_2 - \varphi_1)\cdot n \, \psi \, d\sigma$$

- Si le saut $[\varphi \cdot n]$ défini en (4.2) est non nul en un point $x \in \Gamma$, alors la distribution $\operatorname{div}\varphi$ contient une intégrale sur Γ, ie une "masse de Dirac" le long de la courbe Γ, laquelle ne peut pas être représentée par une fonction, comme nous avons vu plus haut que la masse de Dirac en 0 n'est pas une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il en résulte que $\operatorname{div}\varphi$ est une fonction si et seulement si le saut $[\varphi \cdot n]$ est nul en tout point de Γ, ie si (4.3) a lieu $\square$

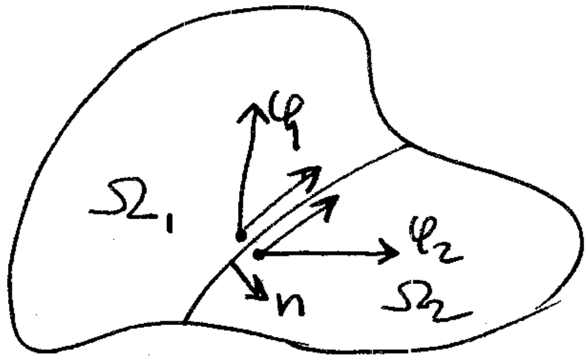

Figure 2 champ φ regulier dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$ appartenant à $H(\mathrm{rot}, \Omega)$. On a $[\varphi \times n] = 0$ qui indique une continuité de la composante tangentielle.

- Nous nous plaçons dans l'hypothèse (4.1), en supposant $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ pour fixer les idées. Nous cherchons à quelle condition le champ φ défini en (4.1) appartient à l'espace $H(\mathrm{rot}, \Omega)$ (voir la figure 2).

Prop ② Continuité de la composante tangentielle

Avec φ défini en (4.1) comme une fonction régulière φ_1 (resp φ_2) dans Ω_1 (resp. dans Ω_2), le champ φ appartient à $H(\mathrm{rot}, \Omega)$ si et seulement si le saut tangentiel $[\varphi \times n]$ défini par

(4.5) $\quad [\varphi \times n] \equiv (\varphi_2 - \varphi_1) \times n \quad$ sur Γ

est nul en tout point $x \in \Gamma$:

(4.6) $\quad [\varphi \times n] = 0, \quad \forall x \in \Gamma$

La preuve de la proposition (2) suit les mêmes grandes lignes que la proposition 1. Si $\psi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3$ est cette fois un champ vectoriel, on a par définition

$$(4.7)\quad \langle \mathrm{rot}\,\varphi, \psi \rangle = \int_\Omega \varphi \cdot \mathrm{rot}\,\psi \, dx$$

par définition. Sans le signe "−" qui disparaît dans l'antisymétrie de ε_{ijk}. Rappelons qu'on a la formule d'intégration par parties :

$$(4.8)\quad \int_\Omega (\mathrm{rot}\,u)\cdot v \, dx = \int_\Omega u\cdot(\mathrm{rot}\,v)\, dx + \int_{\partial\Omega} (n \times u)\, v \, d\sigma$$

- On découpe le membre de droite de (4.7) dans Ω_1 et dans Ω_2. Puis on intègre par parties. Compte tenu de (4.8), il vient

$$(4.9)\quad \begin{cases} \langle \mathrm{rot}\,\varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega_1} (\mathrm{rot}\,\varphi_1)\,\psi + \int_{\Omega_2} (\mathrm{rot}\,\varphi_2)\,\psi + \\ \qquad + \int_{\partial\Omega_1} (\varphi_1 \times \tilde{n}_1)\,\psi + \int_{\partial\Omega_2} (\varphi_2 \times \tilde{n}_2)\,\psi \, d\sigma . \end{cases}$$

Comme plus haut, les intégrales sur $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$ ont pour seul terme non nul celui qui vit sur Γ. On déduit de (4.9) :

$$(4.10)\quad \langle \mathrm{rot}\,\varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega_1} (\mathrm{rot}\,\varphi_1)\,\psi + \int_{\Omega_2} (\mathrm{rot}\,\varphi_2)\,\psi - \int_\Gamma ((\varphi_2 - \varphi_1)\times n)\cdot \psi \, d\sigma$$

- Cette distribution est une fonction si et seulement si l'intégrale sur Γ est toujours nulle $\forall \psi$, i.e. si le saut tangentiel $[\varphi \times n]$ est nul, d'où (4.6)

FD, 7 nov 05.