le cnam

Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

Cours 06

Théorèmes de représentation (i)

Introduction

Calcul du potentiel scalaire

Préliminaires pour le potentiel vecteur

François Dubois

novembre 2005, 15 pages

CVM 6

ch III | Théorèmes de représentation | (i)

Cours du 9 nov 200.

ou : comment se débarasser d'une idée fausse.

1 Introduction

- On se donne un champ de vecteurs $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ (Ω est un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^3$). On cherche dans ce chapitre à définir et calculer son potentiel scalaire φ et son(?) potentiel vecteur ψ de sorte que

(1.1) $\nabla\varphi + \operatorname{rot}\psi = u \; ; \; \varphi : \Omega \to \mathbb{R}, \; \psi : \Omega \to \mathbb{R}^3$

- Bien entendu, à partir de l'identité remarquable

(1.2) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\psi) = \nabla(\operatorname{div}\psi) - \Delta\psi \; ; \; \psi : \Omega \to \mathbb{R}^3$

et des relations toujours vraies

(1.3) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\psi) = 0$

(1.4) $\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0,$

on tire de (1.1) des conditions nécessaires pour le potentiel scalaire :

$$(1.5) \qquad \Delta\varphi = \operatorname{div} u \quad \Omega$$

et le potentiel vecteur :

$$(1.6) \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\psi) = \operatorname{rot} u \quad \Omega \, ,$$

- Si on s'intéresse dans un premier temps au potentiel scalaire, il est clair que la relation (1.5) ne définit pas un unique potentiel φ. Dans ce qui suit, nous tentons de définir une méthodologie pour calculer sans ambiguïté le potentiel scalaire, puis le potentiel vecteur.

② Calcul du potentiel scalaire

- La première idée est de poser un problème de Dirichlet homogène pour le potentiel scalaire φ. On suppose donc

$$(2.1) \qquad \varphi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

et on cherche $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ solution du problème (1.5)(2.1). Un tel problème de Dirichlet a été étudié au chapitre précédent. Il se formule dans l'espace $H^1_0(\Omega)$ des fonctions dérivables nulles au bord. On sait (cf chapitre II !) qu'alors le problème correspondant a une solution unique.

- La formulation variationnelle de (1.5)(2.1) s'écrit donc

$$(2.2)\quad \begin{cases} \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\xi \, dx = -\int_\Omega (\operatorname{div} u)\, \xi \, dx, \ \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Il peut être utile d'intégrer par parties le changem[ent]

$$-\int_\Omega (\operatorname{div} u)\xi \, dx = \int_\Omega u \cdot \nabla\xi \, dx - \int_{\partial\Omega} (u \cdot n)\,\xi \, d\sigma = \int_\Omega u \cdot \nabla \xi \, dx$$

car $\xi \equiv 0$ sur le bord. On peut donc écrire la formulation variationnelle pour le potentiel scalaire avec condition limite de Dirichlet homogène sous la forme

$$(2.3)\quad \begin{cases} \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\xi \, dx = \int_\Omega u \cdot \nabla\xi \, dx \ , \ \forall \xi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

- On remarque que toutes les intégrations par parties précédentes sont en fait inutiles. Pour calculer le potentiel scalaire, on part de la relation (1.1), on la multiplie scalairement par $\nabla\xi$ pour ξ arbitraire dans $H_0^1(\Omega)$. On remarque qu'alors

$$\int_\Omega \nabla\xi \cdot \operatorname{rot}\psi \, dx = -\int_\Omega \xi \operatorname{div}(\operatorname{rot}\psi)\, dx + \int_{\partial\Omega} \xi (\operatorname{rot}\psi \cdot n)\, d\sigma$$

$$(2.4)\qquad \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \operatorname{rot}\psi \, dx = \int_{\partial\Omega} \xi (\operatorname{rot}\psi \cdot n)\, d\sigma$$

compte tenu de la relation (1.3). Mais lorsque $\xi \in H_0^1$, le second membre de (2.4) est nul :

$$(2.5) \qquad \int_\Omega \operatorname{rot}\Psi \cdot \nabla\xi = 0 \quad , \quad \forall \xi \in H^1_0(\Omega).$$

Par suite multiplier (1.1) par $\nabla\xi$ pour $\xi \in H^1_0$ et unité qui conduit immédiatement à (2.3), ce qui découple le problème du potentiel scalaire du calcul du potentiel vecteur.

- Bien entendu, supposer que le potentiel scalaire φ vérifie une condition de Dirichlet homogène est une hypothèse a priori que l'on peut refuser. Imaginons qu'on se donne une condition de Neumann sur le bord $\partial\Omega$ et que u soit assez régulière pour pouvoir écrire la relation (1.1) "jusqu'au bord" ($u \in (H^1(\Omega))^3$ par exemple). Compte tenu de l'identité

$$(2.6) \qquad \operatorname{rot}\Psi \cdot n \equiv \operatorname{div}_\Gamma(\Psi \times n) \quad , \quad n \text{ normale à } \partial\Omega$$

on tire de (1.1) en faisant le produit scalaire avec la normale extérieure n à $\partial\Omega$:

$$(2.7) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \operatorname{div}_\Gamma(\Psi \times n) = u.n \text{ sur } \partial\Omega .$$

Afin de découpler le calcul du potentiel scalaire du calcul du potentiel vecteur, on suppose pour le moment la condition (assez faible) :

$$(2.8) \qquad \operatorname{div}_\Gamma(\Psi \times n) = 0 \text{ sur } \partial\Omega .$$

Lorsque φ est obtenu par résolution d'un problème de Neumann, la condition limite est alors "naturelle" :

(2-9) $$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = u.n \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

- Considérons maintenant le problème de Neumann composé de (1-5) dans Ω et de la condition à la limite (2-9). On sait que pour le problème modèle

(2-10) $$\begin{cases} -\Delta\varphi = f & \Omega \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = g & \partial\Omega \end{cases},$$

on doit supposer la compatibilité entre les données

(2-11) $$\int_\Omega f\,dx + \int_{\partial\Omega} g\,d\sigma = 0$$

pour imaginer qu'une fonction peut être définie par (2-10) (ce à une constante additive près).
Dans le cas présent, on a $f = -\operatorname{div} u$ et $g = u.n$
Comme on a la relation d'intégration par parties

(2-12) $$\int_\Omega \operatorname{div} u\,dx = \int_{\partial\Omega} u.n\,d\sigma$$

pour tout champ de vecteurs (assez régulier) $u : \Omega \to \mathbb{R}$
la compatibilité entre les données du problème de Neumann (1-5)(2-6) est toujours vérifiée

• La formulation variationnelle du problème (1.5) (2.9) prend donc la forme

$$(2.13)\quad \begin{cases} \varphi \in H^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\xi \, dx = -\int_\Omega (\mathrm{div}\, u)\, \xi \, dx + \int_{\partial\Omega} (u \cdot n)\, \xi \, d\sigma, \end{cases} \quad \forall \xi \in H^1(\Omega)$$

Mais on peut aussi réintégrer par parties le changement et le problème (2.13) s'écrit de façon équivalente

$$(2.14)\quad \begin{cases} \varphi \in H^1(\Omega) \\ \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\xi \, dx = \int_\Omega u \cdot \nabla\xi \, dx \quad , \quad \forall \xi \in H^1(\Omega) \end{cases}.$$

L'expression (2.14) a l'avantage de montrer que la fonction test $\xi \equiv 1$ n'induit aucune relation (sauf $0=0$!) et que le potentiel φ solution (2.14) ne saurait être défini au delà d'une constante additive près, ce qui est sans importance puisque seul $\nabla\varphi$ est utile pour la représentation initiale (1.1) du champ de vecteurs u.

• Comme pour le problème de Dirichlet, la formulation (2.14) s'obtient à partir de (1.1) par multiplication scalaire par $\nabla\xi$ puis intégration dans Ω. Notons que cette fois ξ est arbitraire dans $H^1(\Omega)$. Compte tenu des relations (2.4), (2.6) et du choix (2.8) pour le potentiel vecteur ψ, la relation
(la contrainte !)

d'orthogonalité (2.5) reste valable et nous l'écrivons

(2.15) $\quad \int_\Omega \text{rot}\,\psi . \nabla \zeta \, dx = 0 \quad , \quad \text{div}_\Gamma (\psi \times n) = 0, \; \forall \zeta \in H$

Compte tenu de (2.15), l'obtention de la formulation variationnelle (2.14) est alors immédiate

③ Préliminaires pour le potentiel vecteur.

- Rappelons que nous avons deux candidats possibles pour le potentiel scalaire φ. D'une part $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ défini par les relations (2.3) qui ne suppose rien pour le potentiel vecteur ψ. D'autre part $\varphi \in H^1(\Omega)$ défini par les relations (2.14) (problème de Neumann non homogène) qui peut être écrit si on suppose la condition $\text{div}_\Gamma (\psi \times n) = 0$ (relation (2.8)) pour la trace tangentielle du potentiel vecteur.

- Par ailleurs, la relation (1.6) pour rot ψ découple naturellement le calcul du potentiel vecteur du potentiel scalaire. on peut l'écrire sous forme variationnelle directement à partir de (1.1), compte tenu des orthogonalités.

(3.1) $\quad \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \text{rot}\, \xi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in H^1_0, \; \forall \xi,$

(3.2) $\quad \int_\Omega \nabla \varphi . \text{rot}\, \xi \, dx = 0, \quad \forall \varphi, \; \forall \xi \, / \, \text{div}_\Gamma (\xi \times n) = 0$

Nous multiplions la relation initiale (1.1) par $\mathrm{rot}\,\xi$, avec la contrainte

$$(3.3) \qquad \mathrm{div}_\Gamma(\xi \times n) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

si φ a été défini via le problème de Neumann (2.1

Compte tenu de (3.1) et (3.2), il vient

$$(3.4) \quad \begin{cases} \psi \in H? \\ \displaystyle\int_\Omega (\mathrm{rot}\,\psi)\cdot(\mathrm{rot}\,\xi)\,dx = \int_\Omega u\cdot(\mathrm{rot}\,\xi)\,dx, \quad \forall \xi \in H? \end{cases}$$

où H? est une notation pour désigner un espace "naturel" où le problème variationnel aura (?) une solution unique

- Nous savons que le problème (3.4) est du type général

$$(3.5) \quad \begin{cases} \psi \in V \\ a(\psi,\xi) = \langle b, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in V \end{cases}$$

et si on a les trois conditions classiques:

* V est un espace de Hilbert

* la forme bilinéaire $a(\bullet,\bullet)$ est continue sur V et est coercive:

$$(3.6) \quad \exists \alpha > 0, \ \forall \xi \in V, \ a(\xi,\xi) \geq \alpha \|\xi\|_V^2$$

* la forme linéaire $\langle b, \bullet \rangle$ est continue sur V,

alors le problème (3.5) admet une solution unique (cf le résultat de Vishik-Milgram-Lax, rappelé à la leçon précédente). Mais <u>la</u> question est le problème (3.4) est-il du type (3.5), avec toutes les hypothèses afférentes, et en particulier la condition d'ellipticité (ou de coercivité) (3.6) ?

- Nous cherchons V a priori comme un sous-espace (fermé) de $(H^1(\Omega))^3$, muni de la topologie associée à la norme vectorielle de cet espace. Rappelons que pour $\xi \in (H^1(\Omega))^3$, <u>chaque</u> composante ξ_j du champ de vecteurs

(3.7) $$\xi = \sum_{j=1}^{3} \xi_j \, e_j \, , \quad \xi_j : \Omega \to \mathbb{R}$$

appartient à $L^2(\Omega)$ et que <u>toutes</u> les composantes $\partial_k \xi_j = \dfrac{\partial \xi_j}{\partial x_k}$ du gradient appartiennent également à l'espace $L^2(\Omega)$. On pose simplement

(3.8) $$\| \xi \|_0 = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega | \xi_j |^2 dx} \, , \quad \xi \in (L^2(\Omega))^3$$

(3.9) $$\| \nabla \xi \|_0 = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \int_\Omega | \partial_k \xi_j |^2 dx} \, , \quad \xi \in (H^1(\Omega))^3$$

- Bien entendu, le rotationnel est dominé par la "semi-norme" H^1, soit $\| \nabla \xi \|_0$ introduite à la relation (3.9). On a :

$$\int_\Omega |\mathrm{rot}\,\xi|^2 dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \Big| \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \xi_k \Big|^2 dx$$

$$= \int_\Omega \sum_{j<k} |\partial_j \xi_k - \partial_k \xi_j|^2 dx$$

$$\leqslant \int_\Omega \sum_{j<k} 2\left(|\partial_j \xi_k|^2 + |\partial_k \xi_j|^2\right) dx$$

$$\leqslant 2 \sum_{j\neq k} \int_\Omega |\partial_k \xi_j|^2 dx$$

$$\leqslant 2 \sum_{j,k} \int_\Omega |\partial_k \xi_j|^2 dx = 2\,\|\nabla \xi\|_0^2$$

$$(3.10) \qquad \int_\Omega |\mathrm{rot}\,\xi|^2 dx \leqslant 2\,\|\nabla\xi\|_0^2, \quad \xi \in (H^1(\Omega))^3.$$

- Nous en déduisons que la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ défini par

$$(3.11) \qquad a(\psi,\xi) = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\psi \cdot \mathrm{rot}\,\xi \, dx, \quad \psi, \xi \in (H^1(\Omega))^3$$

est continue sur $H^1(\Omega)$. On a par Cauchy-Schwarz :

$$|a(\psi,\xi)| \leqslant \|\mathrm{rot}\,\psi\|_0 \, \|\mathrm{rot}\,\xi\|_0$$

$$\leqslant 2\|\nabla\psi\|_0 \, \|\nabla\xi\|_0 \quad \text{compte tenu de } (3.10)$$

$$\leqslant 2\,\|\psi\|_1 \, \|\xi\|_1$$

grâce à la définition usuelle de la norme H^1 pour les champs de vecteurs ;

(3.12) $$\|\xi\|_1 = \sqrt{\|\xi\|_0^2 + \|\nabla \xi\|_0^2}\,, \quad \xi \in (H^1(\Omega))^3.$$

Nous avons donc

(3.13) $$\left| \int_\Omega \mathrm{rot}\,\psi \cdot \mathrm{rot}\,\xi \, dx \right| \leq 2 \|\psi\|_1 \, \|\xi\|_1 \,, \quad \forall \psi, \xi \in (H^1)$$

- Si V où vit le "candidat potentiel vecteur" est un sous-espace de l'espace $(H^1(\Omega))^3$, l'ellipticité (3.6) impose de rechercher $\alpha > 0$ de sorte que

(3.14) $$\int_\Omega |\mathrm{rot}\,\xi|^2 \, dx \geq \alpha \, \|\xi\|_1^2 \,, \quad \forall \xi \in V.$$

Le lecteur peut méditer la difficulté de l'objectif : si on écrit la relation (3.14) sous la forme équivalente

(3.15) $$\|\xi\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \, \|\mathrm{rot}\,\xi\|_0 \,, \quad \forall \xi \in V,$$

il s'agit de "contrôler" <u>toutes</u> les dérivées de ξ (et la norme L^2 par dessus le marché !) par les <u>seules</u> combinaisons <u>antisymétriques</u> du gradient ! Afin d'être (presque) découragés, nous avons la

Prop 1 Expression du produit scalaire $(H^1(\Omega))^3$.

Pour ψ et ξ champs de vecteurs réguliers $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$, on a :

$$(3.16)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\xi \, dx = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\psi \cdot \mathrm{rot}\,\xi \, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\psi \cdot \mathrm{div}\xi \, dx \\ \displaystyle\quad + \int_{\partial\Omega} \left(\mathrm{rot}\psi \cdot (\xi \times n) + \frac{\partial\psi}{\partial n} \cdot \xi - (\mathrm{div}\psi)(\xi\cdot n) \right) d\sigma \end{cases}$$

- Nous savons que le membre de gauche de (3.16), soit

$$(3.17)\qquad \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\xi \, dx \equiv \int_\Omega \sum_{j,k} (\partial_k \psi_j)(\partial_k \xi_j) \, dx$$

est un "bout" du produit scalaire de l'espace $(H^1(\Omega))^3$, puisque

$$(3.18)\qquad (\psi, \xi)_{H^1} \equiv \int_\Omega \sum_j \psi_j \cdot \xi_j \, dx + \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\xi \, dx \,.$$

<u>Preuve de la proposition (1)</u>.

- On intègre par parties le premier terme du membre de droite de la relation (3.16) :

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\psi \cdot \mathrm{rot}\,\xi \, dx = \int_\Omega \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\psi) . \xi \, dx + \int_{\partial\Omega} (\mathrm{rot}\psi) . (n \times \xi) \, d$$

$$= \int_\Omega \sum_{\cdots} \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{k\ell m} \partial_\ell \psi_m \xi_i \, dx + \int_{\partial\Omega}$$

$$= \int_\Omega \varepsilon_{kij} \varepsilon_{k\ell m} \partial_j \partial_\ell \psi_m \xi_i \, dx - \int_{\partial\Omega} \mathrm{rot}\psi \cdot (\xi \times n) \, d\sigma$$

$$= \int_\Omega (\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}) \partial_j \partial_\ell \psi_m \xi_i \, dx - \int_{\partial\Omega} \mathrm{rot}\psi . (\xi \times n) \, d\sigma$$

$$= \int_\Omega \partial_j \partial_i \psi_j \, \xi_i \, dx - \int_\Omega (\partial_j \partial_j \psi_i) \xi_i \, dx - \int_{\partial\Omega} (\mathrm{rot}\,\psi)(\xi \times n) \, d\sigma$$

- Puis on réintègre par parties dans l'autre sens, en omettant toujours la sommation sur les indices répétés. Il vient :

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\,\psi \cdot \mathrm{rot}\,\xi \, dx = - \int_\Omega (\partial_j \psi_j)(\partial_i \xi_i) \, dx + \int_{\partial\Omega} n_i (\partial_j \psi_j) \xi_i \, d\sigma$$

$$+ \int_\Omega (\partial_j \psi_i)(\partial_j \xi_i) \, dx - \int_{\partial\Omega} n_j (\partial_j \psi_i) \xi_i - \int_{\partial\Omega} \mathrm{rot}\,\psi (\xi \times n) \, d\sigma$$

$$= - \int_\Omega (\mathrm{div}\,\psi)(\mathrm{div}\,\xi) \, dx + \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\xi \, dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left\{ (\mathrm{div}\,\psi)(\xi \cdot n) - \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot \xi - \mathrm{rot}\,\psi (\xi \times n) \right\} d\sigma$$

relation qui est identique à (3.16), à l'ordre près des termes $\square$

- Lorsque $\psi \equiv \xi$, on en tire de l'information pour les normes :

$$(3.19) \left\{ \begin{aligned} \|\nabla \xi\|_0^2 &= \|\mathrm{rot}\,\xi\|_0^2 + \|\mathrm{div}\,\xi\|_0^2 + \\ &\int_{\partial\Omega} \left[(\mathrm{rot}\,\xi)(\xi \times n) + \frac{\partial \xi}{\partial n} \cdot \xi - \mathrm{div}\,\xi (\xi \cdot n) \right] d\sigma \end{aligned} \right.$$

dès que $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est un champ assez régulier. Si on prend ξ nul au bord, les termes de la seconde ligne de (3.19) s'évanouissent et l'on a :

(3.20) $\|\nabla \xi\|_0^2 = \|\mathrm{rot}\,\xi\|_0^2 + \|\mathrm{div}\,\xi\|_0^2, \quad \xi \in (H_0^1(\Omega))^3$.

Cette relation est intéressante. Elle nous montre que pour avoir un espoir d'avoir l'ellipticité (3.14), il est raisonnable de supposer

(3.21) $\psi \in \quad V \subset \{\xi \in (H^1(\Omega))^3, \ \mathrm{div}\,\xi = 0\}$.

Par contre l'hypothèse "naturelle" $\psi \in (H_0^1(\Omega))^3$ où on met à zéro toutes les composantes ne permet pas de reconstituer u à partir de $\nabla\varphi$ et $\mathrm{rot}\,\psi$, ce que suppose la relation (1.1).

Dubois
15 nov 05.