

le **cnam**

Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

Cours 07

Théorèmes de représentation (ii)

Prélimaire géométrique

Préliminaires analytiques

Première majoration de la norme H^1

Une seconde utilisation du lemme de Peetre-Tartar

François Dubois
novembre 2005, 12 pages

CVM (7)

ch (III)

Théorèmes de représentation (ii)

Cours du 16 nov 2005

① Préliminaires géométriques

- Afin de calculer le potentiel vecteur ψ de la représentation " $u = \nabla\psi + \text{rot}\psi$ ", nous cherchons un espace de Hilbert V , noté aussi H ? à la leçon précédente, de sorte que si on pose

$$(1.1) \quad a(\psi, \xi) \equiv \int_{\Omega} \text{rot}\psi \cdot \text{rot}\xi \, dx$$

$$(1.2) \quad \langle b, \xi \rangle \equiv \int_{\Omega} u \cdot \text{rot}\xi \, dx$$

le problème variationnel

$$(1.3) \quad \begin{cases} \psi \in V \\ a(\psi, \xi) = \langle b, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in V \end{cases}$$

soit bien posé. Le point dur est effectivement l'ellipticité, si on cherche ψ dans un sous-espace de $(H^1(\Omega))^3$, muni de la topologie induite par la norme H^1 .

- Il est utile d'introduire les vecteurs tangents au bord (espace $H^1_{0,\bullet}(\Omega)$) et les vecteurs normaux

au bord de Ω (espace $H^1_{0,x}(\Omega)$):

$$(1.4) \quad H^1_{0,\cdot}(\Omega) = \{ \xi \in (H^1(\Omega))^3, \xi \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

$$(1.5) \quad H^1_{0,x}(\Omega) = \{ \xi \in (H^1(\Omega))^3, \xi \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

Compte tenu de la propriété générale établie à la leçon précédente

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{aligned} \|\nabla \xi\|_0^2 &= \|\text{rot} \xi\|_0^2 + \|\text{div} \xi\|_0^2 + \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[(\text{rot} \xi)(\xi \times n) + \frac{\partial \xi}{\partial n} \cdot \xi - (\text{div} \xi)(\xi \cdot n) \right] d\sigma, \end{aligned} \right.$$

ou a donc

$$(1.7) \quad \|\nabla \xi\|_0^2 = \|\text{rot} \xi\|_0^2 + \|\text{div} \xi\|_0^2 + \int_{\partial\Omega} \left[(\text{rot} \xi)(\xi \times n) + \frac{\partial \xi}{\partial n} \cdot \xi \right] d\sigma \quad \forall \xi \in H^1_{0,\cdot}(\Omega)$$

$$(1.8) \quad \|\nabla \xi\|_0^2 = \|\text{rot} \xi\|_0^2 + \|\text{div} \xi\|_0^2 + \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial \xi}{\partial n} \cdot \xi - (\text{div} \xi)(\xi \cdot n) \right] d\sigma \quad \forall \xi \in H^1_{0,x}(\Omega)$$

- or les traces surfaciques du rotationnel et du gradient sont données par [voir le chapitre "courbure" des leçons de géométrie différentielle].

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{rot} \xi|_{\Sigma} &= (\text{div}_{\Gamma}(\xi \times n)) n - \rho \cdot (\xi \times n) + \\ &+ \nabla_{\Gamma}(\xi \cdot n) \times n - \frac{\partial}{\partial n}(\xi \times n) \end{aligned} \right.$$

$$(1.10) \quad \text{div} \xi|_{\Sigma} = \text{div}_{\Gamma}(n \times \xi \times n) + 2\mu(\xi \cdot n) + \frac{\partial}{\partial n}(\xi \cdot n)$$

où ρ est le tenseur de courbure sur le bord $\Sigma = \partial\Omega$ et μ la demi-trace, ou courbure moyenne

- Si $\xi \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$, $\xi = n \times \xi \times n$ sur le bord et

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \xi) \cdot (\xi \times n) &= \operatorname{div}_T(\xi \times n) \cdot n \cdot (\xi \times n) - (\rho(\xi \times n)) \cdot (\xi \times n) \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial n}(\xi \times n) \right) \cdot (\xi \times n) \\ &= -(\rho \cdot (\xi \times n)) \cdot (\xi \times n) - \frac{\partial \xi}{\partial n} \cdot \xi \end{aligned}$$

$$(1.11) \quad (\operatorname{rot} \xi) \cdot (\xi \times n) + \frac{\partial \xi}{\partial n} \cdot \xi = -(\rho \cdot \xi) \cdot \xi, \quad \xi \in H'_{0,0}(\Omega)$$

- Si $\xi \times n = 0$ sur $\partial\Omega$, $\xi = (\xi \cdot n)n$ et on a

$$(\operatorname{div} \xi) \cdot (\xi \cdot n) = 2\mu (\xi \cdot n)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial n}(\xi \cdot n) \right) (\xi \cdot n) \quad \text{donc}$$

$$(1.12) \quad \frac{\partial \xi}{\partial n} \cdot \xi - (\operatorname{div} \xi) \cdot (\xi \cdot n) = -\mu (\xi \cdot n)^2, \quad \xi \in H'_{0,X}(\Omega)$$

- on suppose Ω borné et assez régulière. Donc il en est de même pour le bord $\partial\Omega$ et $\exists C > 0$ de sorte que

$$(1.13) \quad |(\rho \cdot \xi) \cdot \xi| \leq C |\xi|^2 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \forall \xi \in H'_{0,0}(\Omega)$$

$$(1.14) \quad |-\mu (\xi \cdot n)^2| \leq C |\xi|^2 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \forall \xi \in H'_{0,X}(\Omega)$$

Nous injectons (1.11) et (1.13) au membre de droite de (1.7) d'une part, puis (1.12) et (1.14) au membre de droite de (1.8) d'autre part. Nous avons établi la

Prop ① Majoration de la semi-norme H^1

7-4

Nous avons les majorations suivantes :

$$(1.15) \quad \|\nabla \xi\|_0^2 \leq \|\operatorname{rot} \xi\|_0^2 + \|\operatorname{div} \xi\|_0^2 + \int_{\Gamma} |\xi|^2 d\sigma, \quad \forall \xi \in H_{0,\bullet}^1(\Omega)$$

$$(1.16) \quad \|\nabla \xi\|_0^2 \leq \|\operatorname{rot} \xi\|_0^2 + \|\operatorname{div} \xi\|_0^2 + C \int_{\Gamma} |\xi|^2 d\sigma, \quad \forall \xi \in H_{0,x}^1(\Omega)$$

② Preliminaires analytiques

- Nous avons d'abord le théorème de trace qui énonce que l'application "prendre les valeurs au bord du domaine" est surjective de $H^1(\Omega)$ sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$:

$$(2.1) \quad \gamma: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega) \text{ surjective.}$$

- Nous avons ensuite la compacité de l'injection $H^{1/2}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$. Une telle compacité est vraie en général dès qu'on suppose "un peu plus de dérivation" :

$$(2.2) \quad H^{1/2}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega) \text{ compacte}$$

Par composition $\gamma: H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ est compacte :

$$(2.3) \quad H^1(\Omega) \ni \xi \mapsto \gamma\xi = \xi|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega) \text{ est compacte}$$

- Ces résultats s'étendent sans difficulté au cas vectoriel en raisonnant sur les composantes cartésiennes. Nous avons donc

(2.4) $H_{0,\rho}^1(\Omega) \ni \xi \mapsto \gamma \xi = \xi|_{\partial\Omega} \in (L^2(\Omega))^3$ est compact 75

(2.5) $H_{0,x}^1(\Omega) \ni \xi \mapsto \gamma \xi = \xi|_{\partial\Omega} \in (L^2(\Omega))^3$ est compact.

- Si Ω est borné, nous avons vu que l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte (théorème de Rellich). On généralise sans problème ce résultat aux champs de vecteurs et à des sous-espaces fermés de $(H^1(\Omega))^3$:

(2.6) $H_{0,\rho}^1(\Omega) \ni \xi \mapsto \xi \in (L^2(\Omega))^3$ est compact

(2.7) $H_{0,x}^1(\Omega) \ni \xi \mapsto \xi \in (L^2(\Omega))^3$ est compact.

- Dans un préliminaire, la mise en évidence de la compacité à l'aide du lemme de Peetre et Tartar

Lemme (Peetre, Tartar)

on se donne trois espaces de Banach (les Hilbert sont des espaces de Banach particuliers) E_0, E_1, E_2 , deux applications linéaires continues $A_1: E_0 \rightarrow E_1$ et $A_2: E_0 \rightarrow E_2$ de sorte que

$$(2.8) \quad \exists C > 0, \forall \xi \in E_0, \|\xi\|_{E_0}^2 \leq C \left(\|A_1 \xi\|_{E_1}^2 + \|A_2 \xi\|_{E_2}^2 \right).$$

On suppose de plus que

(2.9) l'application $A_2: E_0 \rightarrow E_2$ est compacte.

on a alors les trois conséquences suivantes

(2.10) $\ker A_1$ est un espace de dimension finie

(2.11) $\text{Im } A_1$ est fermée dans E_1 ,

(2.12) $\exists C > 0, \forall \xi \in E_0, \inf_{\zeta \in \ker A_1} \|\xi + \zeta\|_{E_0}^2 \leq C \|A_1 \xi\|_{E_1}^2$.

③ Première majoration de la norme H^1 .

- Pour prouver l'ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$, nous cherchons un sous-espace V de $(H^1(\Omega))^3$ de sorte que

$$(3.1) \quad \|\xi\|_1^2 \leq \frac{1}{\alpha} \|\text{rot } \xi\|_0^2, \quad \forall \xi \in V.$$

Nous devons donc majorer la norme H^1 pour des sous-espaces bien choisis. Comme l'étude est analogue pour les champs tangents au bord $(H_{0,\text{t}}^1(\Omega))$ ou pour les champs normaux au bord $(H_{0,\text{n}}^1(\Omega))$, nous désignons par $H_{0,\text{t}}^1(\Omega)$ la réunion de ces deux sous-espaces

$$(3.2) \quad H_{0,\text{t}}^1(\Omega) = H_{0,\text{t}}^1(\Omega) \cup H_{0,\text{n}}^1(\Omega)$$

- Nous déduisons de la proposition 1 la majoration

$$(3.3) \quad \|\xi\|_1^2 \leq \|\xi\|_0^2 + \|\text{rot } \xi\|_0^2 + \|\text{div } \xi\|_0^2 + C \|\chi \xi\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \xi \in H_{0,\text{t}}^1(\Omega)$$

Nous pouvons introduire $E_0 = H_{0,\text{t}}^1(\Omega)$, $E_1 = (L^2(\Omega))^3$, $E_2 = (L^2(\mathbb{R}^2))^3$, et les applications A_1 et A_2

telles que

$$(3.4) \quad A_1 \xi = (\xi, \operatorname{rot} \xi, \operatorname{div} \xi) \in (L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\Omega))^3 \times L^2(\Omega)$$

$$(3.5) \quad A_2 \xi = \gamma \xi \in (L^2(\partial\Omega))^3$$

L'inégalité (3.3) correspond donc à l'inégalité (2.8) de l'énoncé du lemme de Peché-Tartar et la compacité de A_2 a été énoncée en (2.4) et (2.5). Evaluons le noyau de A_1 . Si $A_1 \xi = 0$, on a clairement $\xi = 0$ compte tenu de (3.4):

$$(3.6) \quad \ker A_1 = \{0\}.$$

La conclusion (2.12) du lemme de Peché-Tartar est intéressante car elle permet d'éliminer le terme en $\int_{\partial\Omega} |\xi|^2 dx$ dans l'estimation de la norme H^1 .

Prop (2) Première majoration de la norme H^1

Il existe $C_0 > 0$ de sorte que $\forall \xi \in H^1_{0,x}(\Omega)$,

$$(3.7) \quad \|\xi\|_1^2 \leq C (\|\xi\|_0^2 + \|\operatorname{rot} \xi\|_0^2 + \|\operatorname{div} \xi\|_0^2)$$

④ Une seconde utilisation du lemme de Peché-Tartar

- La majoration (3.7) n'est pas encore (3.1) puisqu'il reste $\operatorname{div} \xi$ au second membre (on l'éliminera plus tard) mais surtout la norme L^2 !

Compte tenu de la compacité rappelée en (2.7) 7-8 et (2.8), nous posons toujours $E_0 = H^1_{0,x}(\Omega)$, mais cette fois $E_1 = (L^2(\Omega))^4$, $E_2 = (L^2(\Omega))^3$, avec

$$(4.1) \quad A_1 \xi = (\operatorname{rot} \xi, \operatorname{div} \xi) \in (L^2(\Omega))^3 \times L^2(\Omega) = E_1$$

$$(4.2) \quad A_2 \xi = \xi \in (L^2(\Omega))^3 = E_2$$

d'estimation (3.7) en alors l'analogie de l'hypothèse (2.8) du lemme de Poincaré-Tartar. La conclusion (2.10) est que $\ker A_1$ est de dimension finie

- Avant de tirer l'autre conclusion (2.12) de ce résultat, explicitons $\ker A_1$ pour $H^1_{0,\cdot}(\Omega)$ et $H^1_{0,x}(\Omega)$ successivement. Pour l'espace $H^1_{0,\cdot}(\Omega)$, on pose

$$(4.4) \quad M^1_{\cdot}(\Omega) = \{ \xi \in (H^1)^3, \operatorname{rot} \xi = 0, \operatorname{div} \xi = 0, \xi \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

et pour l'espace $H^1_{0,x}(\Omega)$, on pose

$$(4.5) \quad M^1_x(\Omega) = \{ \xi \in (H^1)^3, \operatorname{rot} \xi = 0, \operatorname{div} \xi = 0, \xi \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

ou à bien entendu

$$(4.6) \quad M^1_{\cdot}(\Omega) = \ker A_1 \text{ si } E_0 = H^1_{0,\cdot}(\Omega)$$

$$(4.7) \quad M^1_x(\Omega) = \ker A_1 \text{ si } E_0 = H^1_{0,x}(\Omega)$$

- L'espace $M^1_{\cdot}(\Omega)$ des champs de vecteurs "harmoniques" (de divergence et rotationnel nuls) et de plus tangents au bord de Ω est de dimension finie.

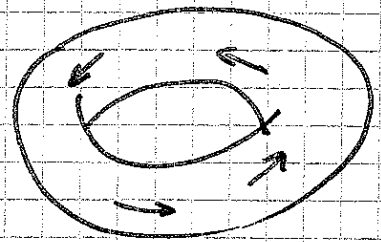
C'est ce qui évince le lemme de Poincaré-Tait 7-9
dans sa conclusion. Quelle est cette dimension?

Le problème est délicat puisqu'il s'agit de propriétés topologiques de l'ouvert Ω . Rappelons que Ω est convexe (d'un seul tenant), borné et niché dans \mathbb{R}^3 . Si Ω est une boule ou homéomorphe à une boule (pouvant être ramené à une boule par une application bijective continue ainsi que sa réciproque), alors $M_0^1(\Omega) = \{0\}$

$$(4.8) \quad M_0^1(\Omega) = \{0\}, \quad \Omega \simeq \text{boule}$$

- Par contre si Ω est une tore (figure 1), alors on "visite" lieu (!!!)

un champ de vecteur non trivial ξ qui fait le tour du domaine



Ω , en restant tangent sur Ω (voir la figure 1).

Figure 1 $\Omega = \text{Tore}$

De fait, on a dans ce cas

$$(4.9) \quad \dim M_0^1(\Omega) = 1, \quad \Omega \simeq \text{Tore}$$

- De façon générale, si Ω est un domaine à n trous (voir la figure 2 pour $n=2$), alors on peut montrer que $\dim M_0^1(\Omega) = n$

$$(4.10) \quad \dim M_0^1(\Omega) = \text{nombre de trous de } \Omega$$

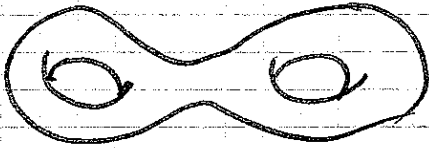


Figure 2 Torus à deux trous

- d'espace $M'_x(\Omega)$ des champs de vecteurs harmoniques et de plus normaux au bord de Ω en également de dimension finie. C'est encore une conséquence du lemme de Poincaré et Tautou. Il s'agit encore de topologie, mais plus simple que pour l'espace précédent. Si Ω est

connexe, rien ne dit que la frontière $\partial\Omega$ soit aussi connexe. On peut retirer à une boule par exemple deux boules plus petites comme pour le domaine de la figure 2.

La frontière $\partial\Omega$ a alors trois composantes :

le bord "extérieur" Γ_0 et les deux bords intérieurs Γ_1 et Γ_2 . De façon générale, le bord $\partial\Omega$ a $(n_\Gamma + 1)$ composantes connexes :

$$(4.11) \quad \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \bigcup_{j=1}^{n_\Gamma} \Gamma_j$$

ou a alors

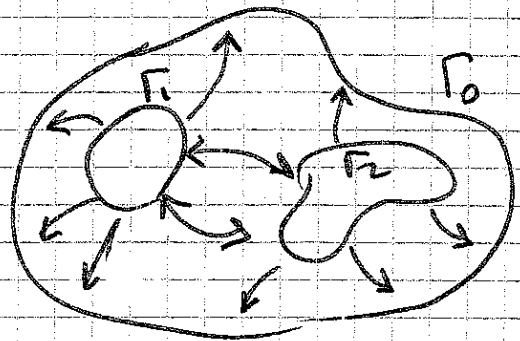


Figure 3. Domaine Ω tel que $\partial\Omega$ a trois composantes connexes ; $\dim M'_x(\Omega) = 2$.

(4.12) dim $M'_X(\Omega) = n_F = (\text{nb de composantes de la frontière, moins 1})$

- Il n'est pas difficile d'expliciter n_F champs de vecteurs indépendants qui appartiennent clairement à $M'_X(\Omega)$. On fixe j , $1 \leq j \leq n_F$ et on cherche $\varphi_j \in H^1(\Omega)$ solution de

$$(4.13) \quad \Delta \varphi_j = 0 \quad \Omega$$

$$(4.14) \quad \varphi_j = \delta_{jk} \quad \text{sur } \Gamma_k$$

La fonction scalaire φ_j est nulle sur Ω , sauf sur Γ_j où elle est identiquement égale à 1. On pose alors

$$(4.15) \quad \xi_j = \nabla \varphi_j.$$

Alors ξ_j appartient à $(H^1(\Omega))^3$ si le bord de Ω est régulier (ce n'est pas un résultat facile), on a clairement $\text{rot } \xi_j = 0$ et $\text{div } \xi_j = 0$ compte tenu de (4.13). Sur le bord,

$$(4.16) \quad \nabla \varphi_j \times n = (\nabla_T \varphi_j) \times n \quad \text{sur } \partial\Omega$$

et $\nabla_T \varphi_j \equiv 0$ car φ_j est constant sur chaque composante connexe de $\partial\Omega$. Donc $\xi_j \in M'_X(\Omega)$.

J, 22/11/05.