

le **cnam**

Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

Cours 08

Théorèmes de représentation (iii)

Rappel de géométrie différentielle

Rappel sur les projecteurs

Une seconde utilisation du lemme de Peetre-Tartar

Théorèmes de représentation

Coupure ?

François Dubois
novembre 2005, 21 pages

ch III Théorèmes de représentation (iii)

Cours du 23 novembre 200

① Rappel de géométrie différentielle.

- Soit $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ un morceau de nappe paramétrée. On peut donc considérer la restriction ψ de φ à Σ : $\psi = \varphi|_{\Sigma}$, définie sur la surface Σ . Si n désigne la normale "extérieure" à la surface Σ (i.e. $n = \frac{1}{\sqrt{g}} e_1 \times e_2$), on a:

$$(1.1) \quad \nabla \varphi \times n = \nabla_{\Gamma} \psi \times n.$$

La composante tangentielle du gradient de la fonction φ est égale au gradient surfacique de sa restriction à la surface.

- On rappelle que la surface Σ est paramétrée par la carte (locale) $\mathbb{R}^2 \ni \hat{x} \mapsto x = \Phi(\hat{x}) \in \Sigma \subset \mathbb{R}^3$, et que $\varepsilon_j = \partial \Phi / \partial \hat{x}_j$. La restriction ψ définit donc une fonction $\hat{\psi}$ composée de Φ et de φ :

$$(1.2) \quad \hat{\psi}(\hat{x}) = \varphi(\Phi(\hat{x})), \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Par définition du gradient surfacique,

$$(1.3) \quad \nabla_{\Gamma} \psi \cdot \varepsilon_j = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}_j}$$

$$(1.4) \quad \exists \xi^1, \xi^2 \text{ tq } \nabla_{\Gamma} \psi = \sum_{j=1}^2 \xi^j \varepsilon_j.$$

- Cherchons les composantes de la projection orthogonale $n \times \nabla\varphi \times m$ du gradient de φ sur l'espace tangent à Σ au point $x \in \Sigma$:

$$(1.5) \quad n \times \nabla\varphi \times n = \nabla\varphi - (\nabla\varphi \cdot n) n.$$

Il suffit de connaître ses composantes covariantes $\nabla\varphi \cdot \xi_j$ sur deux vecteurs de base de cet espace tangent, à savoir ξ_1 et ξ_2 . On a:

$$(1.6) \quad \nabla\varphi \cdot \xi_j = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial \hat{x}_j}.$$

- Par ailleurs, quand on dérive la fonction φ par rapport à \hat{x}_j , on a par dérivation composée de (1.2)

$$(1.7) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \hat{x}_j} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial \hat{x}_j},$$

qui est à la fois identique à $\nabla_{\hat{x}_j} \varphi$ (relation (1.3)) et à l'expression $\nabla\varphi \cdot \xi_j$ obtenue à la relation (1.6). On en déduit l'égalité des deux vecteurs tangents

$$(1.8) \quad n \times \nabla\varphi \times n = \nabla_{\hat{x}_j} \varphi,$$

donc (1.1) en tournant cette relation de $\pi/2$.

(2) Rappel sur les projecteurs.

- Soit H un espace de Hilbert, $\xi \in H$ fixé et M un sous-espace de H de dimension finie. On cherche à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$(2.1) \quad \mu \in M$$

$$(2.2) \quad \|\mu - \xi\| \leq \|\zeta - \xi\|, \quad \forall \zeta \in M$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme dans l'espace H . On note aussi

$$(2.3) \quad \|\mu - \xi\| = \inf_{\zeta \in M} \|\zeta - \xi\|.$$

- Rappelons que $\inf_{\zeta \in M} \|\zeta - \xi\|$ représente la distance du "point" $\xi \in H$ à l'espace M , ainsi qu'illustre à la figure 1.

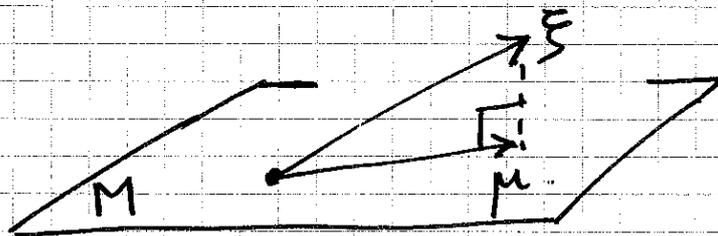


Figure 1. Distance minimale de ξ à l'espace M .

La figure 1 montre que μ est la projection de ξ sur l'espace M , notée $\Pi_M \xi$:

$$(2.4) \quad \mu = \Pi_M \xi, \quad \mu \in M.$$

Nous le montrons de façon élémentaire dans les lignes qui suivent. Rappelons que ce résultat se généralise à une partie convexe fermée non vide M quelconque de l'espace H .

- On se donne une base β_1, \dots, β_n de l'espace M , qu'on suppose orthonormée:

$$(2.5) \quad (\beta_j, \beta_k) = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq n,$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans l'espace H . On introduit alors $\Pi_M \xi$ par:

$$(2.6) \quad \Pi_M \xi = \sum_{j=1}^n (\xi, \beta_j) \beta_j$$

- on a alors clairement

$$(2.7) \quad \xi - \Pi_M \xi \text{ orthogonal à } M.$$

En effet, pour tout β_k vecteur de base, on a:

$$\begin{aligned} (\xi - \Pi_M \xi, \beta_k) &= (\xi, \beta_k) - \left(\sum_j (\xi, \beta_j) \beta_j, \beta_k \right) \\ &= (\xi, \beta_k) - \sum_j (\xi, \beta_j) \delta_{jk} \\ &= (\xi, \beta_k) - (\xi, \beta_k) = 0 \end{aligned}$$

- Donc pour $\tilde{\xi} \in M$ arbitraire, on a

$$(2.8) \quad \|\xi - \Pi_M \xi - \tilde{\xi}\|^2 = \|\xi - \Pi_M \xi\|^2 + \|\tilde{\xi}\|^2$$

par application du théorème de Pythagore, compte tenu de (2.7). En changeant de notation, $\xi = \Pi_M \xi - \tilde{\xi}$, on a, compte tenu de (2.8):

$$(2.9) \quad \|\xi - \Pi_M \xi\|^2 \leq \|\xi - \xi\|^2, \quad \forall \xi \in M.$$

Ceci prouve la relation (2.2), compte tenu du choix (2.4).

(3) Une seconde utilisation du lemme de Peetre et Tartar.

- On désigne par Ω un ouvert connexe borné de \mathbb{R}^3 , de frontière $\partial\Omega$ régulière, composée de $(n+1)$ composantes $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. On appelle τ_Ω le nombre de trous du domaine Ω . L'espace $H_{0,0}^1(\Omega)$ des champs de vecteurs tangents à la surface

$$(3.1) \quad H_{0,0}^1(\Omega) = \{ \xi \in (H^1(\Omega))^3, \xi \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

et l'espace des champs de vecteurs normaux à la surface

$$(3.2) \quad H_{0,X}^1(\Omega) = \{ \xi \in (H^1(\Omega))^3, \xi \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

sont des espaces de Hilbert de dimension infinie pour la norme équivalente à la norme H^1 :

$$(3.3) \quad \|\xi\|_*^2 = \|\xi\|_0^2 + \|\operatorname{rot} \xi\|_0^2 + \|\operatorname{div} \xi\|_0^2.$$

Le produit scalaire associé définit

$$(3.4) \quad (\xi, \varphi)_* \equiv \int_{\Omega} [\xi \cdot \varphi + \operatorname{rot} \xi \cdot \operatorname{rot} \varphi + \operatorname{div} \xi \operatorname{div} \varphi] dx$$

$$\xi, \varphi \in H_{0*}^1(\Omega).$$

- Les applications $H_{0,\bullet}^1(\Omega) \hookrightarrow (L^2(\Omega))^3$ et $H_{0,x}^1(\Omega) \hookrightarrow (L^2(\Omega))^3$ étant compactes, le lemme de Poincaré et Tartar montre que les moyennes

$$(3.5) \quad M_{\bullet}^1(\Omega) = \{ \xi \in H_{0,\bullet}^1(\Omega), \operatorname{rot} \xi = 0, \operatorname{div} \xi = 0 \}$$

$$(3.6) \quad M_x^1(\Omega) = \{ \xi \in H_{0,x}^1(\Omega), \operatorname{rot} \xi = 0, \operatorname{div} \xi = 0 \}$$

sont de dimension finies. Nous les appelons respectivement "champs de vecteurs harmoniques tangents à la surface" et "champs de vecteurs harmoniques normaux à la surface". Nous avons admis à la leçon précédente

$$(3.7) \quad \dim M_{\bullet}^1(\Omega) = \tau_{\Omega}$$

$$(3.8) \quad \dim M_x^1(\Omega) = \eta_{\Gamma} + 1.$$

- Nous pouvons déduire également du lemme de Poincaré et Tartar qu'il existe $C > 0$ de sorte que

$$(3.9) \quad \inf_{\xi \in M_{\bullet}^1(\Omega)} \|\xi - \vartheta\|_*^2 \leq C (\|\operatorname{rot} \xi\|_0^2 + \|\operatorname{div} \xi\|_0^2)$$

$$(3.10) \quad \inf_{\mathcal{P} \in M'_x(\Omega)} \|\xi - \mathcal{P}\|_*^2 \leq C (\|\operatorname{rot} \xi\|_0^2 + \|\operatorname{div} \xi\|_0^2)$$

- Comme les espaces $M'_0(\Omega)$ et $M'_x(\Omega)$ sont de dimension finie, nous pouvons (voir le paragraphe 2 de cette leçon) définir les projections Π'_0 et Π'_x sur ces espaces:

$$(3.11) \quad \Pi'_0 \xi = \sum_{j=1}^{2r} \left(\int_{\Omega} \xi \cdot \beta_j dx \right) \beta_j$$

$$(3.12) \quad \Pi'_x \xi = \sum_{k=0}^{m_r} \left(\int_{\Omega} \xi \cdot \tilde{\beta}_k dx \right) \tilde{\beta}_k$$

où $(\beta_j)_{1 \leq j \leq 2r}$ et $(\tilde{\beta}_k)_{0 \leq k \leq m_r}$ sont des bases orthogonales de $M'_0(\Omega)$ et $M'_x(\Omega)$ respectivement pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_*$ défini à la relation (3.3). Nous remarquons que

$$(3.13) \quad (\xi, \beta)_* = \int_{\Omega} \xi \cdot \beta dx, \quad \forall \beta \in M'_0(\Omega) \cup M'_x(\Omega)$$

car $\operatorname{rot} \beta = 0$, $\operatorname{div} \beta = 0$, et les relations (3.11) (3.12) permettent de définir Π'_0 et Π'_x comme opérant sur l'espace $(L^2(\Omega))^3$:

$$(3.14) \quad (L^2(\Omega))^3 \ni \xi \mapsto \Pi'_0 \xi \in M'_0(\Omega)$$

$$(3.15) \quad (L^2(\Omega))^3 \ni \xi \mapsto \Pi'_x \xi \in M'_x(\Omega).$$

- Nous avons aussi, pour $\xi \in H_{0x}^1(\Omega)$ la décomposition orthogonale

$$(3.16) \quad \|\xi\|_*^2 = \|\pi_\bullet^1 \xi\|_0^2 + \|\xi - \pi_\bullet^1 \xi\|_*^2, \quad \xi \in H_{0,\bullet}^1(\Omega),$$

$$(3.17) \quad \|\xi\|_*^2 = \|\pi_x^1 \xi\|_0^2 + \|\xi - \pi_x^1 \xi\|_*^2, \quad \xi \in H_{0,x}^1(\Omega),$$

qui est une conséquence de l'orthogonalité

$$(3.18) \quad (\xi - \pi_\bullet^1 \xi, \beta)_* = 0, \quad \forall \beta \in M_\bullet^1(\Omega)$$

$$(3.19) \quad (\xi - \pi_x^1 \xi, \tilde{\beta})_* = 0, \quad \forall \tilde{\beta} \in M_x^1(\Omega)$$

- Compte tenu du paragraphe 2, nous avons

$$(3.20) \quad \inf_{\beta \in M_\bullet^1(\Omega)} \|\xi - \beta\|_*^2 = \|\xi - \pi_\bullet^1 \xi\|_*^2$$

$$(3.21) \quad \inf_{\tilde{\beta} \in M_x^1(\Omega)} \|\xi - \tilde{\beta}\|_*^2 = \|\xi - \pi_x^1 \xi\|_*^2.$$

Deux les estimations (3.9) et (3.10), conséquences du lemme de Peché et Tartar, peuvent s'écrire

$$(3.22) \quad \|\xi - \pi_\bullet^1 \xi\|_*^2 \leq C (\|\text{rot} \xi\|_0^2 + \|\text{div} \xi\|_0^2), \quad \xi \in H_{0,\bullet}^1(\Omega)$$

$$(3.23) \quad \|\xi - \pi_x^1 \xi\|_*^2 \leq C (\|\text{rot} \xi\|_0^2 + \|\text{div} \xi\|_0^2), \quad \xi \in H_{0,x}^1(\Omega).$$

Prop (1) Estimation de la norme H^1

8.9

Il existe $C > 0$ tel que

$$(3.24) \quad \|\xi\|_1^2 \leq C \left(\|\Pi_0^1 \xi\|_0^2 + \|\operatorname{rot} \xi\|_0^2 + \|\operatorname{div} \xi\|_0^2 \right), \quad \forall \xi \in H_0^1$$

$$(3.25) \quad \|\xi\|_1^2 \leq C \left(\|\Pi_x^1 \xi\|_0^2 + \|\operatorname{rot} \xi\|_0^2 + \|\operatorname{div} \xi\|_0^2 \right), \quad \forall \xi \in H_{0,x}^1(\Omega).$$

Preuve de la proposition (1)

- On sait d'une part que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_x$ sont équivalentes sur $H_{0,0}^1$ et $H_{0,x}^1$ (voir la leçon précédente). On sait d'autre part

$$(3.26) \quad \|\xi\|_x^2 \leq \|\Pi_0^1 \xi\|_0^2 + C \left(\|\operatorname{rot} \xi\|_0^2 + \|\operatorname{div} \xi\|_0^2 \right), \quad \xi \in H_{0,0}^1(\Omega)$$

compte tenu de (3.16) et (3.22) et

$$(3.27) \quad \|\xi\|_x^2 \leq \|\Pi_x^1 \xi\|_0^2 + C \left(\|\operatorname{rot} \xi\|_0^2 + \|\operatorname{div} \xi\|_0^2 \right), \quad \xi \in H_{0,x}^1(\Omega)$$

en conséquence de (3.17) et (3.23). Les inégalités (3.24) et (3.25) ne sont donc qu'une redéfinition de la constante $C > 0$. \square

(4) Théorèmes de représentation

- Les estimations (3.24) et (3.25) indiquent quels espaces fonctionnels choisir pour garantir l'ellipticité de la forme $(\xi, \xi) \mapsto \int_{\Omega} \operatorname{rot} \xi \cdot \operatorname{rot} \xi \, dx$ relativement à la norme H^1 . On pose

$$(4.1) \quad H_{00}^1(\Omega, \bullet) = \{ \xi \in H_{0, \bullet}^1(\Omega), \pi_{\bullet}^1 \xi = 0, \operatorname{div} \xi = 0 \}$$

$$(4.2) \quad H_{00}^1(\Omega, X) = \{ \xi \in H_{0, X}^1(\Omega), \pi_X^1 \xi = 0, \operatorname{div} \xi = 0 \}$$

Ces deux espaces sont fermés dans H^1 , donc sont des espaces de Hilbert pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_1$, usuel

$$(4.3) \quad (\xi, \zeta)_1 \equiv \int_{\Omega} (\xi \cdot \zeta + \nabla \xi \cdot \nabla \zeta) dx.$$

• De plus, il existe $\alpha > 0$ de sorte que

$$(4.4) \quad \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \xi|^2 dx \geq \alpha \|\xi\|_1^2, \quad \forall \xi \in H_{00}^1(\Omega, \bullet)$$

$$(4.5) \quad \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \xi|^2 dx \geq \alpha \|\xi\|_1^2, \quad \forall \xi \in H_{00}^1(\Omega, X)$$

En effet, ces deux inégalités sont conséquences immédiates de la proposition (I) et de la définition (4.1) (4.2) des espaces $H_{00}^1(\Omega, \bullet)$ et $H_{00}^1(\Omega, X)$. Nous en déduisons que le problème

$$(4.6) \quad \begin{cases} \psi_0 \in H_{00}^1(\Omega, \bullet) \\ \int_{\Omega} \operatorname{rot} \psi_0 \cdot \operatorname{rot} \xi dx = \int_{\Omega} u \operatorname{rot} \xi dx, \quad \forall \xi \in H_{00}^1(\Omega, \bullet) \end{cases}$$

a une solution unique $\psi_0 \in H_{00}^1(\Omega, \bullet)$:

$$(4.7) \quad \psi_0 \in (H^1(\Omega))^3, \quad \psi_0 \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \operatorname{div} \psi_0 = 0, \quad \pi_{\bullet}^1 \psi_0 = 0.$$

Le champ de vecteurs ψ_0 est conservatif ($\operatorname{div} \psi_0 = 0$), tangent au bord ($\psi_0 \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$) et "ne tourne pas autour des trous (éventuels!) de Ω " ($\pi_{\bullet}^1 \psi_0 = 0$).

De même, le problème

$$(4.8) \begin{cases} \psi_x \in H'_{00}(\Omega, x) \\ \int_{\Omega} \text{rot} \psi_x \cdot \text{rot} \xi \, dx = \int_{\Omega} u \, \text{rot} \xi \, dx, \quad \forall \xi \in H'_{00}(\Omega, x) \end{cases}$$

admet une solution unique $\psi_x \in H'_{00}(\Omega, x)$:

$$(4.9) \quad \psi_x \in (H'(\Omega))^3, \quad \psi_x \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \text{div} \psi_x = 0, \quad \Pi'_x \psi = 0$$

Le champ de vecteurs ψ_x est conservatif, normal au bord ($\psi_x \times n = 0$ sur $\partial\Omega$) et "ne relie pas entre elles les composantes convexes de la frontière" ($\Pi'_x \psi_x = 0$).

Th (1) Premier théorème de représentation

Soit $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs "quelconque":

$$(4.10) \quad u \in (L^2(\Omega))^3$$

Alors il existe un potentiel scalaire

$\varphi_0 \in H'_0(\Omega)$ unique et un potentiel vecteur

$\psi_0 \in H'_{00}(\Omega, \bullet)$ unique de sorte que

$$(4.11) \quad u = \Pi'_x u + \nabla \varphi_0 + \text{rot} \psi_0$$

De plus, les trois composantes de cette représentation sont toujours orthogonales dans L^2 :

$$(4.12) \begin{cases} (\tilde{\beta}, \nabla \varphi_0)_0 = (\tilde{\beta}, \text{rot} \xi)_0 = (\nabla \varphi_0, \text{rot} \xi)_0 = 0 \\ \forall \tilde{\beta} \in M'_x(\Omega), \quad \forall \varphi_0 \in H'_0(\Omega), \quad \forall \xi \in H'_{00}(\Omega, \bullet) \end{cases}$$

8-12
 • La première chose qui frappe est que la relation $u = \Pi_x u + \text{rot } \varphi + \text{rot } t_0$ n'est pas de la forme $u = \nabla \varphi + \text{rot } t_0$ et que le programme initial de représentation d'un champ de vecteurs en un gradient plus un rotationnel n'a pas abouti. Ceci, il est vrai, au prix d'hypothèses très générales sur le domaine Ω puisque le nombre F_2 de trous est supposé arbitraire, ainsi que le nombre n_f de composantes convexes "intérieures" de la frontière $\partial\Omega$.

Preuve du théorème (2)

- on montre d'abord l'orthogonalité (4.12).

$$(\tilde{\beta}, \nabla \varphi)_0 = \int_{\Omega} \tilde{\beta} \cdot \nabla \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \text{div} \tilde{\beta} \, \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} (\tilde{\beta} \cdot n) \varphi \, dx$$

qui est nul car $\text{div} \tilde{\beta} = 0$ d'une part et $\varphi = 0$ sur $\partial\Omega$ d'autre part. On a ensuite

$$(\tilde{\beta}, \text{rot } \xi)_0 = \int_{\Omega} \tilde{\beta} \cdot \text{rot } \xi \, dx = \int_{\Omega} \text{rot } \tilde{\beta} \cdot \xi \, dx + \int_{\partial\Omega} (\tilde{\beta} \times n) \cdot \xi \, d\sigma$$

qui est encore nul car $\text{rot } \tilde{\beta} = 0$ dans Ω et $\tilde{\beta} \times n = 0$ sur le bord. On a enfin

$$(\nabla \varphi, \text{rot } \xi)_0 = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \text{rot } \xi \, dx = - \int_{\Omega} \varphi \, \text{div}(\text{rot } \xi) \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi (\text{rot } \xi \cdot n) \, d\sigma$$

qui est nul également puisque $\text{div}(\text{rot } \xi) \equiv 0$ et $\varphi = 0$ sur le bord $\partial\Omega$.

- 8-13
- on procède ensuite par condition nécessaire. On multiplie la relation (4.11) par $\nabla \varphi$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, et on intègre dans Ω . Deux des produits scalaires sont nuls compte tenu de (4.12) et on a nécessairement

$$(4.13) \quad \begin{cases} \varphi_0 \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla \varphi_0 \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} u \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On sait que ce (voir le chapitre sur les espaces de Sobolev vectoriels) que ce problème admet une solution unique $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$. On multiplie ensuite les deux membres de la relation (4.11) par $\text{rot } \xi$ avec $\xi \in H_{00}^1(\Omega, \bullet)$ et on intègre. Comme plus haut, deux des produits scalaires sont nuls au vu de (4.12), φ_0 est nécessairement solution du problème (4.8). Or nous avons vu dans ce paragraphe que ce problème, compte tenu de l'ellipticité (4.4), admet une solution unique.

- Une fois $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $\psi_0 \in H_{00}^1(\Omega, \bullet)$ définis sans ambiguïté, on se demande ce que vaut le champ de vecteurs résiduel

$$(4.14) \quad \rho_x \equiv u - \nabla \varphi_0 - \text{rot } \psi_0.$$

Une première propriété (difficile! Nous l'admettons) est que $\rho_x \in [H^1(\Omega)]^3$. On a aussi $\text{div } \rho_x = 0$ puisque

$\Delta \varphi_0 = \operatorname{div} u$ et $\operatorname{rot} p_x = 0$ puisque $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \varphi_0) = \operatorname{rot} u$. 8-14
 Enfin quand on regarde les termes de bord résiduels pour le problème (4.6), il vient

$$(4.15) \quad \int_{\partial \Omega} (\operatorname{rot} \varphi_0 \times n) \cdot \xi \, d\sigma = \int_{\partial \Omega} (u \times n) \cdot \xi \, d\sigma, \quad \forall \xi \in H_{00}^1(\Omega)$$

Comme les champs ξ sont tangents au bord, on a nécessairement

$$(4.16) \quad \operatorname{rot} \varphi_0 \times n = u \times n \quad \text{sur } \partial \Omega$$

au moins formellement si u n'est pas un champ de vecteurs régulier. On en déduit que $p_x \times n = 0$ sur $\partial \Omega$ puisque (cf paragraphe 1)

$$\nabla \varphi_0 \times n = \nabla_T \varphi_0 \times n = 0$$

compte tenu de la nullité de φ_0 sur le bord.

Par suite

$$(4.17) \quad p_x \in M_x^1(\Omega).$$

- Si on s'intéresse maintenant aux composantes $\int_{\Omega} p_x \cdot \tilde{\beta}_k \, dx$ d'une base de $M_x^1(\Omega)$, elles sont égales à $\int_{\Omega} u \cdot \tilde{\beta}_k \, dx$ compte tenu de l'orthogonalité (4.12).
 Donc

$$(4.18) \quad p_x = \Pi_x^1 u$$

ce qui établit le résultat. \square

Ph) (2) Second théorème de représentation:

Soit $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs satisfaisant l'hypothèse (4.10). Alors il existe un unique potentiel scalaire (à une constante additive près) $\varphi_x \in H^1(\Omega)$ et un unique potentiel vecteur $\psi_x \in H'_{\infty}(\Omega, x)$ de sorte que

$$(4.19) \quad u = \Pi'_0 u + \nabla \varphi_x + \text{rot} \psi_x$$

De plus, les trois composantes de cette représentation sont toujours orthogonales dans L^2 :

$$(4.20) \quad \begin{cases} (\beta, \nabla \varphi)_0 = (\beta, \text{rot} \psi)_0 = (\nabla \varphi, \text{rot} \psi)_0 = 0, \\ \forall \beta \in M'_0(\Omega), \forall \varphi \in H^1(\Omega), \forall \psi \in H'_{\infty}(\Omega, \bullet) \end{cases}$$

- A nouveau, la représentation d'un champ de vecteurs ne se contente pas d'un havers potentiel scalaire φ_x et d'un délicat potentiel vecteur ψ_x . Il est utile de connaître le "flux" du champ u autour de chacun des trous de Ω .

Preuve du théorème (2)

- On établit d'abord, comme pour le théorème 1, les orthogonalités (4.20) on a

$$(\beta, \nabla \varphi)_0 = \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \text{div} \beta \cdot \varphi \, dx + \int_{\partial \Omega} (\beta \cdot n) \varphi \, d\sigma$$

qui est nul car $\text{div} \beta = 0$ dans Ω et $\int_{\partial \Omega} (\beta \cdot n) \varphi \, d\sigma = 0$ sur $\partial \Omega$ si $\beta \in M'_0(\Omega)$. On a ensuite

$(\beta, \text{rot } \xi)_0 = \int_{\Omega} \beta \text{ rot } \xi \, dx = \int_{\Omega} \text{rot } \beta \cdot \xi \, dx + \int_{\partial \Omega} \beta \cdot (n \times \xi) \, d\sigma$ 8-16
 également nul car $\text{rot } \beta = 0$ dans Ω et $n \times \xi = 0$
 sur le bord $\partial \Omega$. Enfin,

$(\nabla \varphi, \text{rot } \xi)_0 = \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \text{rot } \xi \, dx = - \int_{\Omega} \varphi \text{ div}(\text{rot } \xi) \, dx + \int_{\partial \Omega} \varphi \text{ div}_{\Gamma}(\xi \times n) \, d\sigma$
 toujours nul car $\text{div}(\text{rot } \xi) \equiv 0$ dans Ω
 et $\xi \times n = 0$ sur $\partial \Omega$, donc $\text{div}_{\Gamma}(\xi \times n) \equiv 0$.

- On établit ensuite des formulations variationnelles nécessaires pour le potentiel scalaire φ_x et le potentiel vecteur ψ_x . On multiplie la relation (4.19) par $\nabla \varphi$ ($\varphi \in H^1(\Omega)$). Alors $(\Pi \cdot u, \nabla \varphi)_0 = (\text{rot } \psi_x, \nabla \varphi)_0 = 0$ à priori compte tenu de la relation (4.20) et φ_x est donc solution du problème variationnel

$$(4.21) \begin{cases} \varphi_x \in H^1(\Omega) / \mathbb{R} \\ \int_{\Omega} \nabla \varphi_x \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} u \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Ce problème de Neumann a une solution unique dans H^1 / \mathbb{R} car la fonction cté ne donne aucune information. Pour le potentiel vecteur ψ_x , on multiplie la relation (4.19) par $\xi \in H^1_{\infty}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ et on intègre dans Ω ou a alors, quel que soit le choix de $u \in (L^2)^3$ et de $\varphi_x \in H^1(\Omega)$: $(\Pi \cdot u, \text{rot } \xi)_0 = (\nabla_x \varphi, \text{rot } \xi)_0 = 0$ au vu de (4.20). Donc ψ_x est solution du problème (4.8). Compte tenu de l'ellipticité (4.5),

ce problème a une solution unique.

8-17

- On se demande ensuite ce que vaut le champ "restant"

$$(4.22) \quad \rho_0 \equiv u - \nabla \varphi_x - \text{rot} \psi_x.$$

Comme pour le champ ρ_x défini à la relation (4.14), on admet que $\rho_0 \in (H^1(\Omega))^3$. On a bien entendu $\text{div} \rho_0 = \text{div} u - \Delta \varphi_x = 0$ et $\text{rot} \rho_0 = \text{rot} u - \text{rot}(\text{rot} \psi_x)$.

Enfin les termes de bord du problème (4.21)

conduisent à $u \cdot n - \frac{\partial \varphi_x}{\partial n} = 0$. Par ailleurs $\text{div}(\psi_x \cdot n) = (\text{rot} \psi_x) \cdot n = 0$ car ψ_x est normal au bord.

Donc $\rho_0 \cdot n = 0$ sur le bord et

$$(4.23) \quad \rho_0 \in M'_0(\Omega).$$

- Les composantes $\int_{\Omega} \rho_0 \cdot \beta_j dx$ de ρ_0 contre une base β_j de l'espace $M'_0(\Omega)$ sont égales à $\int_{\Omega} u \cdot \beta_j dx$ compte tenu de l'orthogonalité (4.20). On a donc

$$(4.24) \quad \rho_0 = \Pi'_0 u$$

et le théorème 2 est démontré. \square

⑤ Coupure ?

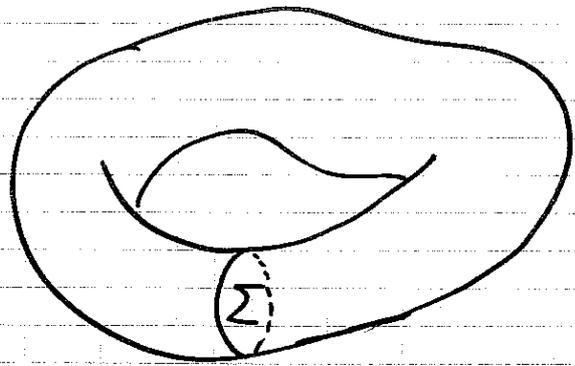


Figure 2 domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec $\tau_{\Omega} = 1$ et $m_{\Gamma} = 0$.

- Nous supposons dans cette dernière partie que Ω est de type tonique, avec $m_{\Gamma} = 0$ et $\tau_{\Omega} = 1$ (Figure 1). Il est alors possible d'expliciter le calcul d'une fonction de base β de l'espace $M_0^1(\Omega)$. On construit une surface Σ intérieure au domaine Ω dont le bord $\partial\Sigma$ intersecte le bord $\partial\Omega$ orthogonalement. Puis on "ouvre" la coupure ainsi réalisée (Figure 2) d'une grandeur infinitésimale. On donne alors naissance à un ouvert coupé $\tilde{\Omega}$ tel que

$$(5.1) \quad \tau_{\tilde{\Omega}} = 0$$

$$(5.2) \quad \partial\tilde{\Omega} = \partial\Omega \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_-$$

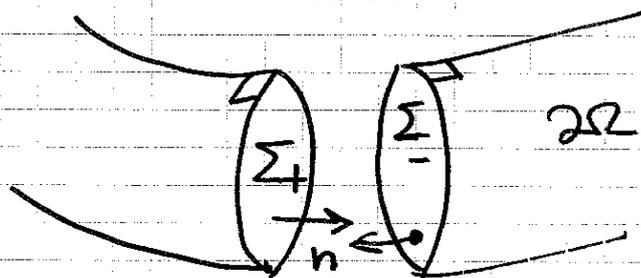


Figure 3. ouverture (infinitésimale!) de la coupure Σ

- on construit un champ $\theta \in H^1(\tilde{\Omega})/\mathbb{R}$ solution variationnelle du problème de Neuman

$$(5.3) \quad \Delta \theta = 0 \quad \tilde{\Omega}$$

$$(5.4) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \partial \tilde{\Omega}$$

$$(5.5) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{1}{|\Sigma|} \text{ sur } \Sigma_+, \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = -\frac{1}{|\Sigma|} \text{ sur } \Sigma_-$$

où Σ_+ et Σ_- sont introduits à la figure 3, et $|\Sigma|$ est la surface commune à Σ_+ et Σ_- . Ce problème de Neuman est bien posé car

$$(5.6) \quad \int_{\partial \tilde{\Omega}} \frac{\partial \theta}{\partial n} d\sigma = 0$$

par construction - même. On pose ensuite

$$(5.7) \quad \beta = \nabla \theta.$$

- Alors $\beta \in (H^1(\Omega))^3$, ce qui est une propriété délicate; il faut que la coupure soit bien orthogonale pour ne pas perdre de régularité pour la fonction θ . Alors $\text{rot } \beta = 0$ par construction - même, $\text{div } \beta = 0$ compte tenu de (5.3), $\beta \cdot n = \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0$ sur $\partial \Omega$ donc

$$(5.8) \quad \beta \in M_0^1(\Omega).$$

De plus, le flux de β sur la surface Σ_+ vaut 1 :

$$(5.9) \quad \int_{\Sigma_+} \beta \cdot n d\sigma = 1.$$

Cette construction fournit un champ de vecteurs harmonique de flux unité le long de toute section de Ω par une surface "de type de Σ ", puisque le champ β est conservatif.

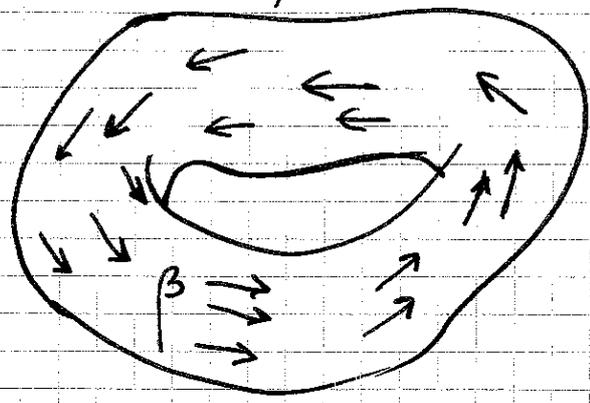


Figure 4

champ harmonique tangent au bord.

28 novembre 2005