

le **cnam**

Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

Cours 10

Éléments finis vectoriels (ii)

Élément fini de Lagrange dans le plan
Discrétisation du Laplacien

François Dubois
décembre 2005, 15 pages

Cours du 7 déc 2005

① Élément fini P_1 de Lagrange dans \mathbb{R}^2 .

- Nous avons vu à la leçon précédente que si on se donne un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , borné et de frontière $\partial\Omega$ polygonale, muni d'un maillage simplicial \mathcal{T} , il est possible, étant donnée une famille u_S de scalaires pour S sommet du maillage ($S \in \mathcal{T}'$):

$$(1.1) \quad \mathcal{T}' \ni S \mapsto u_S \in \mathbb{R},$$

de construire dans chaque triangle K ($K \in \mathcal{T}^2$) du maillage, une fonction $u^K \in P_1$ de sorte que

$$(1.2) \quad u^K(S) = u_S, \quad S \text{ sommet de } K.$$

- La question naturelle est maintenant de "recoler" les fonctions u^K définies localement dans chaque élément fini K . on pose

$$(1.3) \quad u(x) = u^K(x), \quad x \in K^{\circ}$$

et on se demande si on peut prolonger $u(\cdot)$ par continuité.

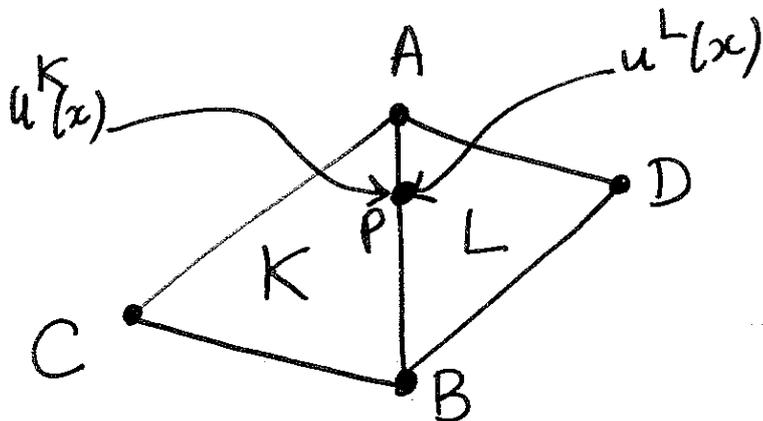


Figure 1 Continuité de l'interpolation par éléments fins P_1 de Lagrange.

- on précise le problème, pour deux triangles K et L qui partagent la même arête pour fixer les idées on a pour x dans K ou L :

$$(1.4) \quad u^K(x) = u_A \lambda_A^K(x) + u_B \lambda_B^K(x) + u_C \lambda_C^K(x), \quad x \in K$$

$$(1.5) \quad u^L(x) = u_A \lambda_A^L(x) + u_B \lambda_B^L(x) + u_D \lambda_D^L(x), \quad x \in L.$$

on peut étendre u^K et u^L par continuité si pour $x \in K$ tendant vers un point P de l'interface $[A, B]$ la limite de $u^K(x)$ (pour $x \rightarrow P, x \in K$) est égale à la limite de $u^L(x)$ avec $x \in L, x \rightarrow P$. Or les fonctions u^K et u^L sont régulières séparément dans K et L et il suffit donc de vérifier que $u^L(P) = u^K(P)$. Or si $P \in [A, B]$, il existe $\theta \in [0, 1]$ de sorte que

$$(1.6) \quad P = (1-\theta)A + \theta B, \quad \theta \in [0, 1]$$

Le paramètre θ s'interprète facilement.

$$\theta = \lambda_B^K(P) = \lambda_B^L(P), \quad 1-\theta = \lambda_A^K(P) = \lambda_A^L(P)$$

et la troisième coordonnée barycentrique est nulle: $\lambda_C^K(P) = 0, \lambda_D^L(P) = 0$. Compte tenu de ces remarques géométriques, on a

$u^K(P) = (1-\theta)u_A + \theta u_B = u^L(P)$, $0 \leq \theta \leq 1$
 et les deux fonctions u^K et u^L coïncident
 sur toute l'arête $[A, B]$. La relation (1.3)
 s'étend donc sans ambiguïté à tous les
 points du bord des triangles

$$(1.7) \quad u(x) = u^K(x), \quad x \in \bar{K}$$

et on définit de ce fait une fonction $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$
continue:

$$(1.8) \quad u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \quad u|_K \in P_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}^2.$$

- On peut maintenant construire les "fonctions
de base globales" $\varphi_S \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, φ_S affine
 dans chaque triangle $K \in \mathcal{T}^2$, de sorte que

$$(1.9) \quad \varphi_S(S') = 1 \text{ si } S' = S, \quad 0 \text{ si } S' \neq S, \quad S, S' \in \mathcal{T}^0.$$

on note par ailleurs $H^1(\Omega, \mathcal{C})$ l'espace des fonc.
 tris continues $\bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, affines dans chaque trian-
 gle:

$$(1.10) \quad H^1(\Omega, \mathcal{C}) = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}), \forall K \in \mathcal{T}^2, v|_K \in P_1\}.$$

Cette notation sera justifiée plus loin.

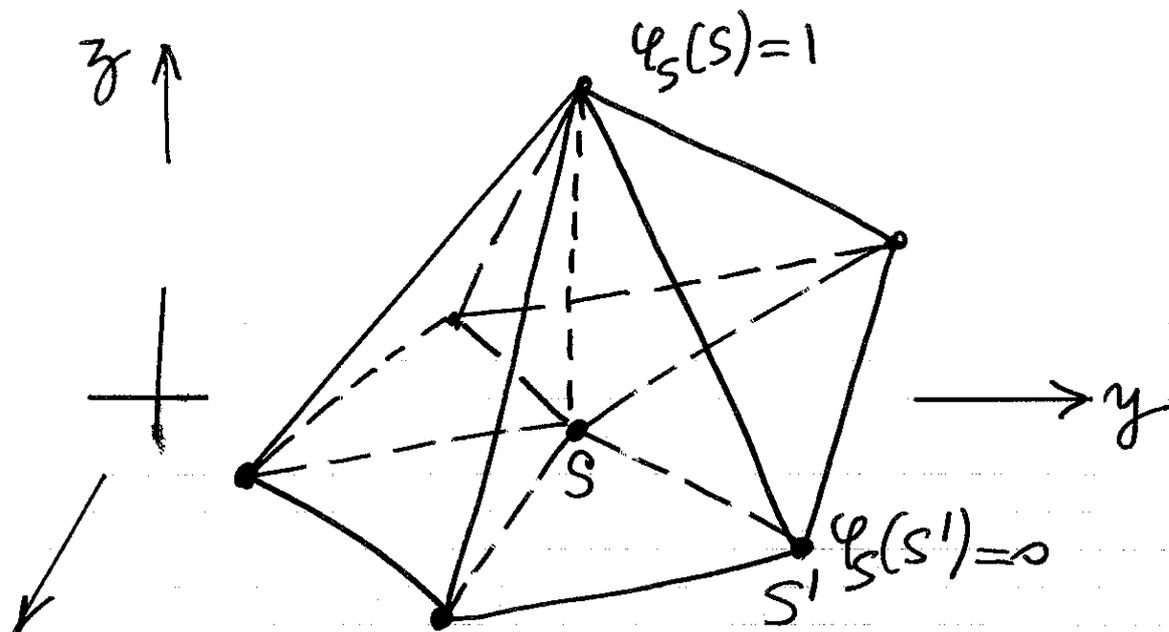


Figure 2 Fonction de base $\varphi_S(\bullet) \in H^1(\Omega, \mathcal{T})$ de l'élément fini P , de Lagrange.

Soit $S \in \mathcal{T}^0$ un sommet du maillage et K un triangle du maillage ($K \in \mathcal{T}^2$) de sorte que $S \in K$ un sommet de K . Pour $x \in K$, on pose

$$(1.11) \quad \varphi_S(x) = \lambda_S^K(x), \quad x \in K, \quad S \text{ sommet de } K, \quad K \in \mathcal{T}^2.$$

Pour x n'appartenant pas à un triangle du maillage ayant S comme sommet, on pose

$$(1.12) \quad \varphi_S(x) = 0, \quad x \notin K \in \mathcal{T}^2 \text{ tel que } K \ni S.$$

La fonction $\varphi_S(\bullet)$ définie par les relations (1.11) et (1.12), représentée graphiquement figure 2 est affine dans chaque triangle du maillage et continue, i.e

$$(1.13) \quad \varphi_S \in H^1(\Omega, \mathcal{T})$$

et elle vérifie clairement la relation (1.9) 10-5
 on l'appelle fonction de base "globale" de
 l'élément fini P_1 de Lagrange. Dans chaque
 triangle ayant le sommet S comme sommet,
 on définit simplement la coordonnée barycentrique
 qui appartient à cet élément et ce sommet S
 particulier.

- La famille $(\varphi_S)_{S \in \mathcal{T}^0}$ de fonctions définie
 plus haut est une base de l'espace $H^1(\Omega, \mathcal{T})$;
 toute fonction $u \in \overline{H^1(\Omega, \mathcal{T})}$ s'écrit de
 façon unique sous la forme

$$(1.14) \quad u = \sum_{S \in \mathcal{T}^0} \alpha_S \varphi_S, \quad \alpha_S \in \mathbb{R}$$

et on a

$$(1.15) \quad u(S) = \alpha_S, \quad \forall S \in \mathcal{T}^0.$$

Les fonctions de base φ_S permettent d'interpréter
 les valeurs α_S de la fonction u aux som-
 mets du maillage comme les coefficients de
 la décomposition (1.14).

- Nous avons vu plus haut l'inclusion

$$(1.16) \quad H^1(\Omega, \mathcal{T}) \subset C^0(\overline{\Omega}).$$

Nous allons maintenant montrer que

$$(1.17) \quad H^1(\Omega, \mathcal{T}) \subset H^1(\Omega)$$

où l'espace $H^1(\Omega)$, défini au chapitre 2 de ce cours,

est l'ensemble des fonctions de carré intégrable, dont toute dérivée partielle au sens des distributions est représentée par une fonction, laquelle est de carré intégrable. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une "fonction test" (ψ très régulière, $\text{supp } \psi$ inclus dans l'ouvert Ω , donc ψ nulle au bord). Soit $v \in L^2(\Omega)$ une fonction de carré intégrable et $j \in \{1, 2\}$. On a par définition de la dérivation au sens des distributions:

$$(1.18) \quad \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_j}, \psi \right\rangle = - \int_{\Omega} v \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx, \quad j \in \{1, 2\}.$$

- Si $v \in H^1(\Omega, \mathcal{G})$, v est clairement dans $L^2(\Omega)$ (elle est continue et bornée). Pour $x \in K^\circ$ (l'intérieur du triangle K) et $K \in \mathcal{G}^2$, on note v_j la dérivée partielle $\frac{\partial v}{\partial x_j}$:

$$(1.9) \quad v_j(x) = \frac{\partial v}{\partial x_j}(x), \quad x \in K^\circ, \quad K \in \mathcal{G}^2.$$

Toute la question est de préciser le lien entre v_j , la dérivée ponctuelle, définie partout sauf aux interfaces entre deux triangles du maillage, et la dérivée $\frac{\partial v}{\partial x_j}$ au sens des distributions. On calcule donc le membre de droite de (1.18) lorsque ψ est une fonction régulière nulle au bord de Ω . On a:

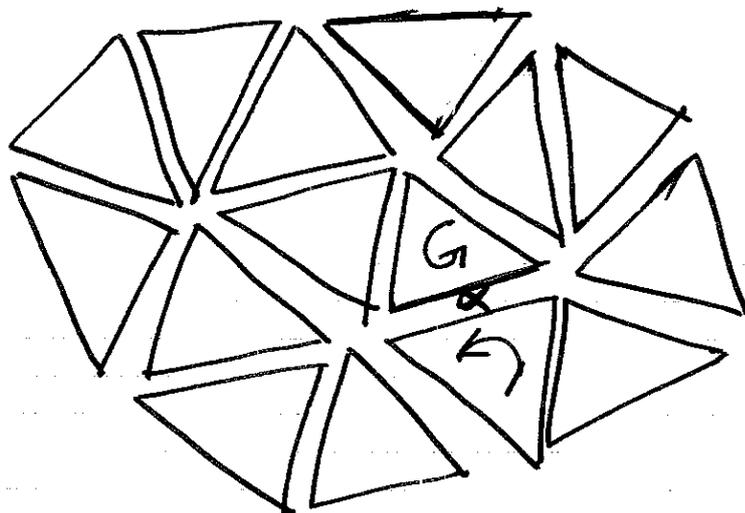


Figure 3. Vue 'éclatée' du maillage \mathcal{G} de \mathbb{R}^2 .
Les bords intérieurs des éléments définissent l'ensemble des arêtes $\alpha \in \mathcal{G}'$, avec leurs deux sens de parcours.

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} v \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx &= - \sum_{K \in \mathcal{G}^2} \int_K v(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx \\
 &= - \sum_{K \in \mathcal{G}^2} \left\{ - \int_K v_j \psi(x) dx + \int_{\partial K} v n_j^K \psi d\sigma \right\} \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{G}^2} \int_K v_j \psi dx - \sum_{K \in \mathcal{G}^2} \int_{\partial K} v n_j^K \psi d\sigma \\
 &= \int_{\Omega} v_j \psi dx - \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{G}' \\ \alpha \not\subset \partial \Omega}} \int_{\alpha} (v^+(x) - v^-(x)) (n_j) \psi d\sigma.
 \end{aligned}$$

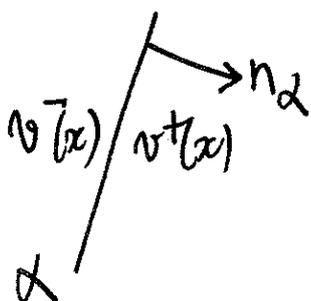


Figure 4 limite à gauche $v^-(x)$ et à droite $v^+(x)$ le long des deux bords de l'arête $\alpha \in \mathcal{G}'$

En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K v n_j^K \psi \, dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \sum_{\alpha \in \mathcal{E}^1, \alpha \subset \partial K} \int_{\alpha} v n_j^K \psi \, d\sigma \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \sum_{\alpha \in \mathcal{E}^1} \int_{\alpha} v(x) \varepsilon_{\alpha}^K(n_{\alpha})_j \psi(x) \, d\sigma \quad \text{cf leçon 9} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{E}^1, \alpha \not\subset \partial \Omega} \left(\int_{\alpha} v^+ \psi(x) - \int_{\alpha} v^- \psi(x) \right) d\sigma (n_{\alpha})_j \\ &\quad \text{car } \psi \equiv 0 \text{ sur } \partial \Omega \end{aligned}$$

avec v^+ et v^- définies comme limites de part et d'autre de la fonction v . Or $v \in H^1(\Omega; \mathcal{E})$ de l'arête α est continue. Donc $v^+ \equiv v^-$ et ce terme complémentaire est en fait nul.

• Par suite,

$$(1.19) \quad - \int_{\Omega} v \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \, dx = \int_{\Omega} v_j \psi(x) \, dx, \quad j \in \{1, 2\}$$

et la dérivée partielle au sens des distributions de v est une fonction, c'est la dérivée partielle ponctuelle v_j , sans terme de type "masse de Dirac" parce que $v \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Comme v est affine dans chaque maille K , il est clair que $v_j = \text{cte}$ par triangle, donc $v_j \in L^2(\Omega)$, ce qui maintient la propriété : $v \in H^1(\Omega)$. L'inclusion (1.17) est établie.

② Discretisation du Laplacien

- La propriété (1.17) est dite "conformité H^1 de l'élément fini P_1 ". Elle permet de voir l'espace discret $H^1(\Omega, \mathcal{T}) = \langle \varphi_S, S \in \mathcal{T}^0 \rangle$ comme un sous-espace de $H^1(\Omega)$ de dimension finie. Il permet d'approcher tout problème variationnel posé dans $H^1(\Omega)$ ou un sous-espace de H^1 . Nous détaillons dans ce paragraphe le cas du problème de Poisson, avec condition limite de Dirichlet homogène. On cherche $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$(2.1) \quad -\Delta u = f, \text{ dans } \Omega$$

$$(2.2) \quad u = 0, \text{ sur } \partial\Omega$$

- On a vu (voir le chapitre de représentation des champs de vecteurs) que ce problème se formule sous forme variationnelle:

$$(2.3) \quad \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \delta v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$. on commence par introduire un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$; il suffit de poser

$$(2.4) \quad H_0^1(\Omega, \mathcal{T}) = H_0^1(\Omega) \cap H^1(\Omega, \mathcal{T})$$

et il est facile de voir que si on note \mathcal{T}_0^0 l'ensemble des sommets S intérieurs au domaine Ω 10-10

$$(2.5) \quad S \in \mathcal{T}_0^0 \Leftrightarrow S \in \mathcal{T}^0 \text{ et } S \notin \partial\Omega,$$

ona

$$(2.6) \quad H_0^1(\Omega, \mathcal{T}) = \langle \varphi_S, S \in \mathcal{T}_0^0 \rangle.$$

L'espace $H_0^1(\Omega, \mathcal{T})$ est engendré par les fonctions de base φ_S dont le sommet S n'est pas sur la frontière du domaine Ω .

- on approche le problème continu (2.3) sous changer la formulation variationnelle, en remplaçant simplement la recherche de $u \in H_0^1(\Omega)$ par un champ scalaire discret $u_{\mathcal{T}} \in H_0^1(\Omega, \mathcal{T})$:

$$(2.7) \quad \begin{cases} u_{\mathcal{T}} \in H_0^1(\Omega, \mathcal{T}) \\ \int_{\Omega} \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega, \mathcal{T}). \end{cases}$$

Les fonctions tests maintenant appartiennent à l'espace de dimension finie $H_0^1(\Omega, \mathcal{T})$. on utilise la représentation (1.14) pour développer $u_{\mathcal{T}}$ dans la base des "fonctions pyramidales" φ_S :

$$(2.8) \quad u_{\mathcal{T}} = \sum_{S \in \mathcal{T}_0^0} \alpha_S \varphi_S$$

on choisit $v = \varphi_T$, $T \in \mathcal{T}_0^0$ comme fonction test. Il vient:

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla \varphi_T dx = \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{S \in \mathcal{T}_0^p} x_S \varphi_S \right) \cdot \nabla \varphi_T dx$$

$$= \sum_{S \in \mathcal{T}_0^p} x_S \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_S \cdot \nabla \varphi_T dx \right)$$

ce qui permet d'introduire la matrice de rigidité relative à l'opérateur de Laplace :

$$(2.8) \quad A_{S,T} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_S \cdot \nabla \varphi_T dx, \quad S, T \in \mathcal{T}_0^p$$

• on a par ailleurs, en approchant f sur l'espace $H^1(\Omega, \mathcal{T})$ tout entier :

$$(2.9) \quad f \approx f_{\mathcal{T}} = \sum_{U \in \mathcal{T}_0^p} f_U \varphi_U$$

$$\int_{\Omega} f \varphi_T dx \approx \sum_{U \in \mathcal{T}_0^p} \left(\int_{\Omega} \varphi_U \cdot \varphi_T dx \right) f_U$$

et on introduit la matrice de masse relative à la base φ_S :

$$(2.9) \quad M_{U,T} = \int_{\Omega} \varphi_U \cdot \varphi_T dx, \quad U, T \in \mathcal{T}_0^p$$

• on écrit la relation (2.7) en fixant $v = \varphi_T$, avec T sommet intérieur au maillage. si X désigne le vecteur des scalaires x_S pour $S \in \mathcal{T}_0^p$,

$$(2.10) \quad X = \{ x_S, S \in \mathcal{T}_0^p \}$$

on a alors simplement :

$$(2.11) \quad \int_{\Omega} \nabla u_{\mathcal{T}} \cdot \nabla \varphi_T dx = (A \cdot X)_T \equiv \sum_S A_{S,T} X_S$$

ou a de même, en posant F le vecteur des 10-12 changements $f_U, U \in \mathcal{T}^0$:

$$(2.12) \quad F = \{ f_U, U \in \mathcal{T}^0 \}$$

$$(2.13) \quad \int_{\Omega} f \varphi_T dx \simeq (M.F)_T \equiv \sum_{U \in \mathcal{T}^0} M_{U,T} f_U$$

- la formulation variationnelle discrète prend alors la forme matricielle

$$(2.14) \quad A.X = M.F$$

où A, M et F sont connus, et le vecteur X est inconnu. Le calcul de la matrice A s'effectue avec le classique algorithme d'assemblage des matrices élémentaires. Il en est de même du second membre (exercice laissé au lecteur!).

- Pour organiser les données d'un maillage simplicial \mathcal{T} , on dispose classiquement des coordonnées (x_S, y_S) des sommets S du maillage et du pointeur $ISOM(K, i)$ qui à $K \in \mathcal{T}^2$ et $i \in \{1, 2, 3\}$ associe le numéro du i^o sommet de l'élément K (ou de numéro K d'un point de vue de la mise en œuvre informatique) (voir la figure 4). Lorsqu'on connaît le maillage \mathcal{T} , on calcule d'abord la matrice élémentaire $A_{ELEM}(K, i, j)$ avec $K \in \mathcal{T}^2, 1 \leq i, j \leq 3$ qui consiste simplement à intégrer le gradient

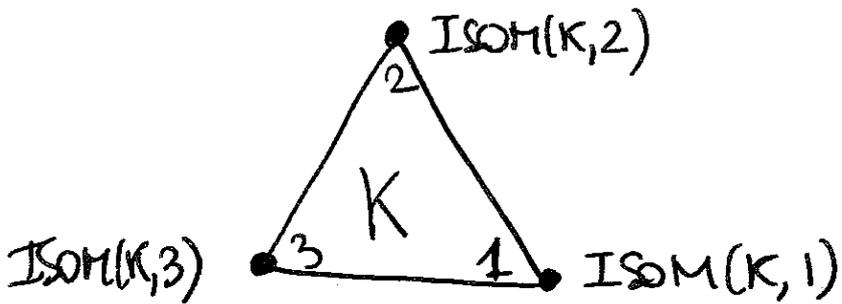


Figure 4 Numérotation locale (1,2,3) et globale $ISOM(K,1)$, $ISOM(K,2)$, $ISOM(K,3)$ des trois sommets du triangle K .

des coordonnées barycentriques. On note λ_i^K la i^{e} coordonnée barycentrique, sachant que les numéros S_1, S_2, S_3 des trois sommets de K se situent aux adresses $ISOM(K,1)$, $ISOM(K,2)$ et $ISOM(K,3)$:

$$(2.15) \quad S_i = ISOM(K, i), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

La notation λ_i^K en eu fait une abus de notation pour $\lambda_{S_i}^K$... on calcule donc en avant

$$(2.16) \quad AELEM(K, i, j) = \int_K \nabla \lambda_i^K \cdot \nabla \lambda_j^K \, dx$$

ce qui est facile car les λ_j^K sont affines, donc leur gradient sont des vecteurs constants.

- La matrice assemblée $A(S, T)$ pour $S, T \in \mathcal{C}_0^p$ s'obtient par assemblage des matrices élémentaires $AELEM$. On initialise d'abord le tableau $A(S, T)$ à zéro. Puis on procède par une boucle sur les éléments $K \in \mathcal{C}^2$:

boucle sur les éléments $K \in \mathcal{C}^2$

boucle sur $i: 1 \rightarrow 3$

boucle sur $j: 1 \rightarrow 3$

$I = \text{ISOM}(K, i)$ (numéro global de sommet)

$J = \text{ISOM}(K, j)$ (idem)

Si I et J sont des sommets intérieurs
($S_i \in \mathcal{C}_0^\circ$ et $S_j \in \mathcal{C}_0^\circ$) alors

$A(I, J) \leftarrow A(I, J) + A\text{ELEM}(K, i, j)$

fin du test

fin boucle sur j

fin boucle sur i

fin de boucle sur K .

- Nous renvoyons le lecteur au cours d'éléments finis pour les développements concernant le second membre, le traitement d'autres conditions aux limites, le changement de l'opérateur de Laplace pour un opérateur elliptique arbitraire.

Jubon's
30 dec 2005.