

le **cnam**

Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

Cours 11

Eléments finis vectoriels (iii)

Unisolvance et conformité

Elément fini de Raviart-Thomas (RT77)

Elément $H(\text{div})$ de Nédélec (1980)

François Dubois
décembre 2005, 17 pages

cours du 14 décembre 2005

① Unisolvance et conformité

- Rappelons que de façon très générale, un élément fini est la donnée d'un triplet (K, Σ, P) . Le premier argument K est un élément géométrique, triangle à deux dimensions d'espace, tétraèdre à trois dimensions, dans le cas de maillages simpliciaux. La famille Σ est l'ensemble des degrés de liberté; il s'agit de formes linéaires $\sigma \in \Sigma$ qui agissent sur les fonctions régulières (scalaires jusqu'à maintenant, vectorielles pour cette leçon et les suivantes) $u: K \rightarrow \mathbb{R}^P$.

$$(1.1) \quad \mathcal{C}^m(K, \mathbb{R}^P) \ni u \mapsto \langle \sigma, u \rangle \in \mathbb{R}, \quad \sigma \in \Sigma$$

$\langle \sigma, u \rangle$ est un nombre qui dépend linéairement et continuellement (relativement à une norme à préciser!) de u . Enfin, P est l'espace des fonctions interpolantes qui permet de définir $u(x)$ en tout point $x \in K$:

$$(1.2) \quad u \in P: \quad K \ni x \mapsto u(x) \in \mathbb{R}^P$$

- Afin de lier les degrés de liberté Σ et les fonctions interpolantes, on suppose la propriété d'unisolvance, locale à chaque élément fini

K:

$$(1.3) \quad \forall \alpha_\sigma \in \mathbb{R}, \exists ! u \in P, \forall \sigma \in \Sigma, \langle \sigma, u \rangle = \alpha_\sigma$$

Si on se donne des scalaires arbitraires $\alpha_1, \dots, \alpha_{\#\Sigma}$, on peut trouver une unique fonction $u \in P$ de sorte que le σ° degré de liberté soit exactement égal à α_σ . Ceci implique, vu la linéarité

$$(1.4) \quad \#\Sigma = \dim P.$$

- L'unicité permet de construire une base locale φ_σ^K de fonctions appartenant à P de sorte que

$$(1.5) \quad P = \langle \varphi_\sigma^K, \sigma \in \Sigma \rangle, \quad K \in \mathcal{C}$$

$$(1.6) \quad \langle \sigma', \varphi_\sigma^K \rangle = 1 \text{ si } \sigma' = \sigma, 0 \text{ sinon.}$$

Du point de vue algébrique, la famille Σ est la base duale de la base φ_σ^K , qui est donc bien adaptée aux degrés de liberté de la famille Σ . Dans le cas de l'élément P_i de Lagrange, la famille Σ est l'ensemble des valeurs aux sommets de l'élément (nœuds de Diac ponctuelles) et les fonctions de base locale sont les coordonnées barycentriques relativement au simplexe K .

- 11-3
- L'étape suivante concerne l'assemblage, ou le "recollement" des éléments finis. Les degrés de liberté Σ sont (en général) associés à des éléments topologiques bien définis relativement au maillage : sommets (\mathcal{C}^0), arêtes (\mathcal{C}^1), faces (\mathcal{C}^2), volumes (\mathcal{C}^3). On peut donc se donner une famille globale de degrés de liberté (comme les valeurs u_S de la fonction u sur tous les sommets du maillage, $S \in \mathcal{C}^0$) puis, pour tout élément K du maillage, construire la fonction u^K grâce à la propriété d'univariance

$$(1.7) \quad \langle \sigma, u^K \rangle = \alpha_\sigma, \quad \sigma \in \Sigma, \text{ porté par } K, u^K \in \mathcal{P}$$

On juxtapose les fonctions u^K précédentes

$$(1.8) \quad u(x) = u^K(x), \quad x \in K, K \text{ élément de } \mathcal{T}$$

et la question naturelle est de savoir à quel espace de fonctions (plus ou moins régulières!) la fonction u appartient. Dans le cas de l'élément de Lagrange P_1 , nous avons vu que $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, et aussi que $u \in H^1(\Omega)$. On dit dans ces conditions que u est conforme dans \mathcal{C}^0 et que u est conforme dans $H^1(\Omega)$.

- De façon générale, on dit que l'élément fini (K, Σ, P) est conforme dans l'espace de Hilbert H si la fonction définie

par interpolation de la famille α_σ via les relations (1.7) et (1.8) appartient à l'espace H .

- Notons $\Sigma(\mathcal{T})$ la famille de tous les degrés de liberté définis sur l'ensemble de la triangulation \mathcal{T}

$$(1.9) \quad \Sigma(\mathcal{T}) \supset \Sigma, \quad \forall K \text{ élément de } \mathcal{T}$$

et

$$(1.10) \quad \Sigma(\mathcal{T}) \ni \sigma \rightarrow \alpha_\sigma \in \mathbb{R}$$

une famille de paramètres (réels) associés à cet ensemble global de degrés de liberté. Alors la fonction u définie par (1.7)/(1.8) se note $\Pi(\alpha, \Sigma, \mathcal{T})$:

$$(1.11) \quad \forall \sigma \in \Sigma, \langle \sigma, \Pi(\alpha, \Sigma, \mathcal{T}) \rangle = \alpha_\sigma$$

$$(1.12) \quad \forall K \text{ élément de } \mathcal{T}, \quad \Pi(\alpha, \Sigma, \mathcal{T})|_K \in P.$$

L'élément fini (K, Σ, P) permet d'interpeler "entre" les degrés de liberté $\Sigma(\mathcal{T})$. L'élément (K, Σ, P) est dit conforme dans l'espace H lorsque

$$(1.13) \quad \Pi(\alpha, \Sigma, \mathcal{T}) \in H$$

quel que soit α introduite à la relation (1.10).

② Élément fini de Raviart Thomas (RT77)

11-5

- L'élément fini de Raviart et Thomas (ou RT77, en référence à l'année de sa publication) est défini par un triplet (K, Σ, P) dans des maillages \mathcal{T} triangulaires d'un ouvert Ω (borné, \mathbb{R}^2 polygonal) de \mathbb{R}^2 . La lettre K désigne donc dans ce paragraphe un triangle du plan. L'espace P permet d'interpoler des champs de vecteurs $u: K \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(2.1) \quad u \in P: \exists \alpha \in \mathbb{R}^2, \beta \in \mathbb{R}, u(x) = \alpha + \beta x, \forall x \in \mathbb{R}^2$$

si on restreint x à vivre dans le triangle K .

Un champ $u \in P$ peut aussi s'écrire

$$(2.2) \quad u(x) = \beta (x - \xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \beta \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2,$$

où ξ est un point arbitraire de \mathbb{R}^2 (Figure 1)

- les degrés de liberté Σ sont portés par les arêtes α de l'élément K . Si $\alpha \in \mathcal{E}^1$ est une arête de normale n_α , $\langle \sigma_\alpha, u \rangle$ est simplement

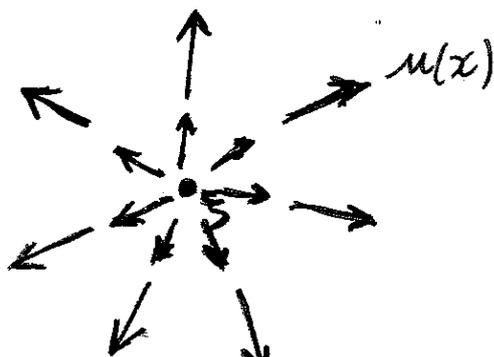


Figure 1 champ de vecteurs $u \in P$; élément RT77

le flux du champ de vecteurs u à travers l'arête α :

$$(2.3) \quad \langle \sigma_\alpha u \rangle = \int_\alpha u \cdot n_\alpha \, d\sigma(x), \quad u: K \rightarrow \mathbb{R}^2$$

on a bien entendu la propriété importante

Prop (1) Unisolvance de l'élément RT77.

on se donne un triangle K et des scalaires

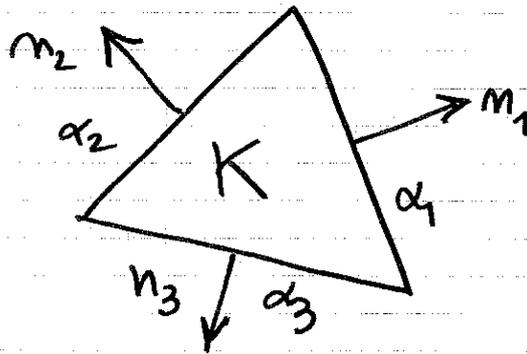
$$p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}.$$

Il existe un

champ de vecteurs

unique $u \in P$

tel que



$$(2.4) \quad \begin{cases} \int_{\alpha_j} u \cdot n_j \, d\sigma = p_j \\ 1 \leq j \leq 3. \end{cases}$$

Figure 2 Degrés de liberté (bords) de l'élément RT77.

La donnée des trois flux p_1, p_2, p_3 le long des trois arêtes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ du triangle K détermine complètement le champ de vecteurs $u \in P$ (voir la figure 2).

- la preuve de la proposition 1 est très élégante. Compte tenu de la linéarité de l'application γ définie par:

$$(2.5) \quad P \ni u \mapsto \gamma(u) = \left(\int_{\alpha_j} u \cdot n_j \, d\sigma \right)_{j=1,2,3},$$

du fait que $\dim P = 3$ clairement (voir (2.1)), il suffit de montrer que si $u \in P$ vérifie

$$(2.6) \quad \int_{\alpha_j} u \cdot n_j \, d\sigma = 0, \quad \forall j = 1, 2, 3,$$

C'est à dire si les trois flux du champ de vecteurs $u \in P$ sont nuls, alors u est nul.

En effet, γ est alors injective, donc l'injective ou la linéarité et l'égalité des dimensions.

Or si u vérifie (2.6), on a

$$\sum_j \int_{\alpha_j} u \cdot n_j \, d\sigma = \int_{\partial K} u \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{div} u \, dx = 2\beta |K|$$

Compte tenu des classiques relations d'intégration par parties et de l'hypothèse $u \in P$. Donc $\beta = 0$ et u est un champ de vecteurs constant:

$u(x) \equiv \zeta, \forall x \in \mathbb{R}^2$. Mais alors $\zeta \cdot n_j = 0$ pour les trois normales n_j du triangle K . Deux au moins de ces trois normales sont indépendantes, donc le vecteur ζ est nul et la propriété est établie. \square

• On peut expliciter la fonction de base φ_α^K pour K trianglée du plan \mathbb{R}^2 . Elle vérifie

(2.7) $\varphi_\alpha^K \in P, \alpha$ arête de $K, K \in \mathcal{T}^2$

(2.8) $\int_{\beta} \varphi_\alpha^K \cdot n_\beta \, d\sigma = 1$ si $\beta \in \mathcal{O}', \beta = \alpha, 0$ si $\beta \in \mathcal{O}', \beta \neq \alpha$.

Le champ φ_α^K est donc tangent aux arêtes β du triangle K qui ne sont pas l'arête α .

Compte tenu de la structure particulière des champs de vecteurs de P (relation (2.2)), on en déduit que

(2.9) $\varphi_\alpha^K(A) = 0, \alpha = (B, C); K = (A, B, C)$.

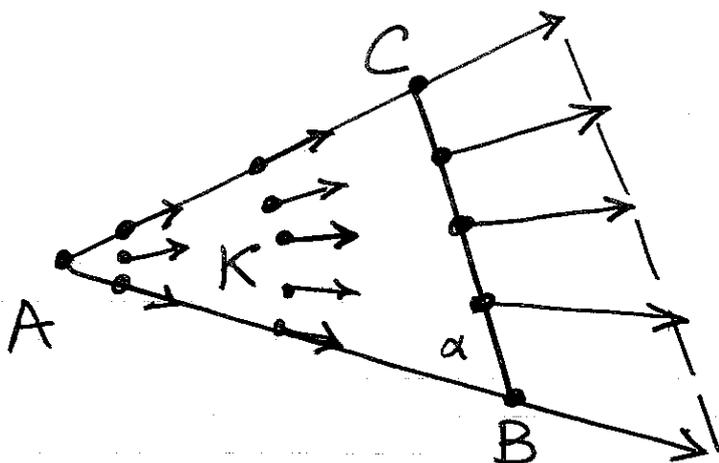


Figure 3 Fonction de base φ_α^K relative à l'arête $\alpha = (B, C)$ du triangle $K = (A, B, C)$ pour l'élément fini RT77.

on a alors clairement

$$(2.10) \quad \varphi_\alpha^K(x) = \frac{1}{2|K|} (x-A), \quad x \in K$$

compte tenu de l'hypothèse (2.8) et du calcul suivant:

$$1 = \int_\alpha \varphi_\alpha^K \cdot n_\alpha \, d\sigma = \int_{\partial K} \varphi_\alpha^K \cdot n \, d\sigma = \int_K \operatorname{div} \varphi_\alpha^K \, dx.$$

- on "recolle" maintenant les fonctions de base locale φ_α^K pour former une fonction de base globale de l'élément RT77. Soit $\alpha \in \mathcal{E}'$ une arête du maillage simplicial \mathcal{T} , G_α et D_α les deux triangles qui composent son cobord (avec D_α absent si α est au bord de Ω). La normale n_α est par convention orientée de G_α vers D_α (Figure 4). La normale extérieure à G_α coïncide avec n_α , alors que la normale extérieure à D_α vaut $-n_\alpha$.

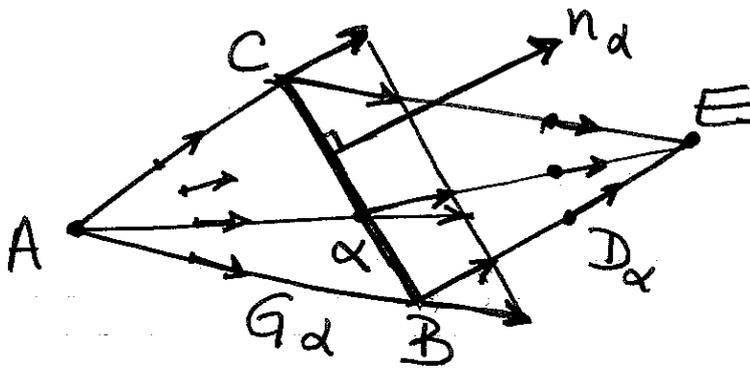


Figure 4 Fonction de base globale φ_α relative à l'arête $\alpha \in \mathcal{E}'$ intérieure au maillage. Son support est le cobord (G_α, D_α) de l'arête α , c'est à dire les deux triangles du maillage qui contiennent l'arête α dans leur bord.

La fonction de base φ_α vaut $\varphi_\alpha^{G_\alpha}$ dans le triangle G_α et "seu opposée" dans D_α , en tenant compte du rôle joué par les différents sommets! On prend donc

$$(2.11) \quad \varphi_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{2|G_\alpha|} (x-A) & , x \in G_\alpha \\ -\frac{1}{2|D_\alpha|} (x-E) & , x \in D_\alpha \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

en suivant les notations de la figure 4. On a alors

$$(2.12) \quad \int_{\beta} \varphi_\alpha \cdot n_\beta \, d\sigma = 1 \text{ si } \beta \in \mathcal{E}', \beta = \alpha, \quad 0 \text{ si } \beta \in \mathcal{E}', \beta \neq \alpha$$

ou a la

Prop (2) φ_α n est continu sur les arêtes du maillage

Il suffit de le vérifier pour l'arête α ,

sachant que pour toutes les autres arêtes (voir (2.11))¹¹⁻¹⁰,
on a

$$(2.13) \quad \varphi_\alpha \cdot n_\beta \equiv 0 \quad \beta \neq \alpha, \beta \in \mathcal{B}'.$$

d'arête α a pour équation

$$(2.14) \quad x \cdot n_\alpha = \text{cte}, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

dans le plan \mathbb{R}^2 . Donc $\varphi_\alpha \cdot n_\alpha$ est une constante
de part et d'autre de l'arête. Vérifions qu'il
s'agit bien de la même constante. On a
d'une part et d'autre de l'arête α

$$(2.15) \quad 1 = \int_\alpha (\varphi_\alpha \cdot n_\alpha) d\sigma = |\alpha| (\varphi_\alpha \cdot n_\alpha), \quad \alpha \in \mathcal{B}'$$

donc $\varphi_\alpha \cdot n_\alpha \equiv 1/|\alpha|$, où $|\alpha|$ est la longueur
 $|\mathcal{B}|$ de l'arête α . Donc $\varphi_\alpha \cdot n_\alpha$ est bien constant
à la traversée de l'arête α , ainsi que l'indique
que la figure 4. Par contre la composante
tangentielle $\varphi_\alpha \cdot \tau_\alpha$ est quant à elle discon-
tinuë à la traversée de α .

• On pose

$$(2.16) \quad H(\text{div}, \Omega, \mathcal{B}) = \langle \varphi_\alpha, \alpha \in \mathcal{B}' \rangle$$

l'espace vectoriel engendré par les fonctions de
base introduites plus haut. On a la

Prop 3 Conformité $H(\text{div})$ de l'élément RT77.

On a

$$(2.17) \quad H(\text{div}, \Omega, \mathcal{B}) \subset H(\text{div}, \Omega),$$

espace des champs de vecteurs $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ de $(L^2(\Omega))^2$ ¹¹⁻¹¹
 dont la divergence au sens des distributions
 est une fonction qui appartient aussi à $L^2(\Omega)$.

• La preuve de la proposition 3 consiste à remarquer que tout champ de vecteurs $u \in H(\text{div}, \Omega, \mathcal{C})$ est de la forme

$$(2.8) \quad u = \sum_{\alpha \in \mathcal{C}^1} \theta_\alpha \varphi_\alpha, \quad \theta_\alpha \in \mathbb{R}$$

donc par linéarité, u est continu pour toute arête d du maillage ^{α} . On vérifie ensuite que tout champ de vecteurs régulier par morceaux ayant cette propriété appartient en fait à $H(\text{div}, \Omega)$. On a, pour $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (régulière, nulle au bord de Ω):

$$(2.9) \quad \langle \text{div} u, \psi \rangle = - \int_{\Omega} u \cdot \nabla \psi \, dx.$$

or

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} u \cdot \nabla \psi \, dx &= - \sum_{K \in \mathcal{C}^2} \int_K u \cdot \nabla \psi \, dx \\ &= - \sum_{K \in \mathcal{C}^2} \sum_{j=1}^2 \left(- \int_K (\partial_j u) \psi \, dx + \int_{\partial K} u_j \cdot n_j^K \psi \, d\sigma \right) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{C}^2} \int_K (\text{div} u) \psi \, dx - \sum_{K \in \mathcal{C}^2} \sum_{d \in \mathcal{C}^1, d \subset \partial K} \int_d (u \cdot n)_\alpha \psi \, d\sigma \\ &= \sum_{K \in \mathcal{C}^2} \int_K (\text{div} u) \psi \, dx - \sum_{d \in \mathcal{C}^1} \int_d \left((u \cdot n)_\alpha^+ - (u \cdot n)_\alpha^- \right) \psi \, d\sigma \end{aligned}$$

où $(u \cdot n)_\alpha^\pm$ représentent les valeurs de part et

d'autre de l'autre d . Or $(u \cdot n_x)$ est continu, donc ce saut est réduit à zéro, et

$$(2.20) \quad \langle \text{div}, \psi \rangle = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\text{div}) \psi dx$$

La divergence au sens des distributions coïncide avec la fonction (discontinue) div , constante dans chaque triangle K . Donc elle appartient bien à L^2 et la proposition est établie. \square

③ Élément $H(\text{div})$ de Nedelec (1980)

• Cet élément est la généralisation naturelle de l'élément RTT dans le cas de trois dimensions d'espace. On parle d'ailleurs de l'élément RTN pour "Raviart. Thomas. Nedelec". La lettre K désigne maintenant un tétraèdre de \mathbb{R}^3 . L'espace P désigne toujours un ensemble de champs de vecteurs

$$(3.1) \quad u \in P: \exists \alpha \in \mathbb{R}^3, \beta \in \mathbb{R}, u(x) = \alpha + \beta x, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

ou a clairement

$$(3.2) \quad \text{dim } P = 4,$$

et la représentation (2.2) est encore valable, à condition de prendre maintenant $\xi \in \mathbb{R}^3$.

• des degrés de liberté σ sont maintenant portés par les faces $f \in \mathcal{F}^2$ (triangulaires!) du maillage; ce sont encore les flux du champ

de vecteurs u ,

$$(3.3) \quad \langle \sigma_f, u \rangle = \int_f u \cdot n_f \, d\sigma(x), \quad u: \bar{K} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

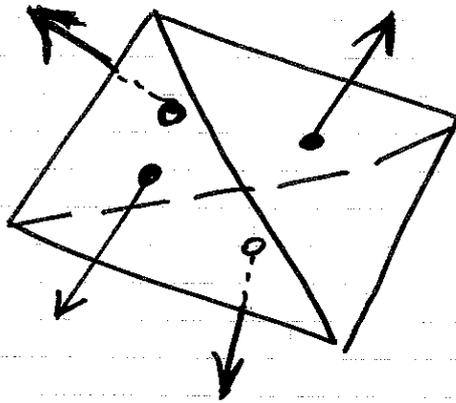


Figure 5 Degrés de liberté qui permettent de symboliser l'élément fini de Nédélec au forme dans l'espace $H(\text{div}, \mathbb{R})$.

Prop (4) Unisolvance de l'élément de Nédélec

On se donne un tétraèdre K et des scalaires p_j ($1 \leq j \leq 4$). Alors il existe un champ de vecteurs unique $u \in \mathcal{P}$ de sorte que

$$(3.4) \quad \int_{f_j} u \cdot n_j \, d\sigma = p_j, \quad f_j \text{ face de } K, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

La donnée des quatre flux p_j le long des quatre faces f_j définit complètement le champ $u \in \mathcal{P}$ (voir la figure 4).

La preuve est analogue à celle de la proposition 1. Elle est laissée en exercice au lecteur.

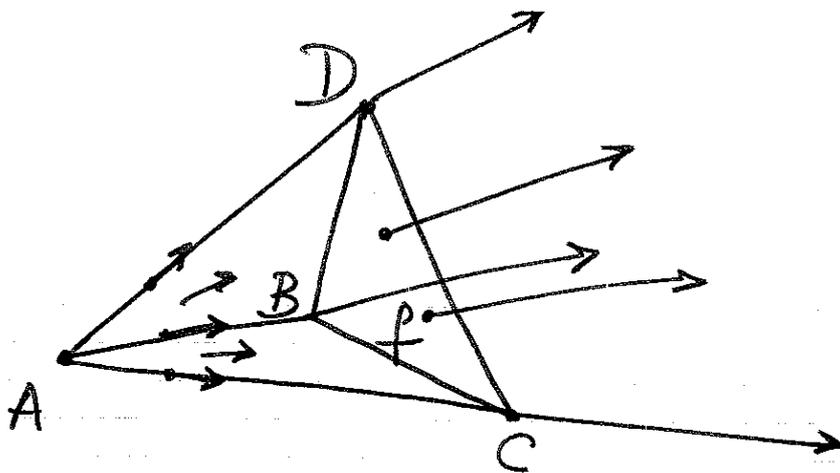


Figure 6 Fonction de base locale φ_f^k de l'élément de Nédélec pour la face $f = (B, C, D)$ du tétraèdre $K = (A, B, C, D)$.

- Pour f face du tétraèdre K , la fonction de base φ_f^k pour K tétraèdre de \mathbb{R}^3 vérifie

$$(3.5) \quad \varphi_f^k \in P, \quad f \text{ face de } K, \quad K \in \mathcal{T}^3$$

$$(3.6) \quad \int_{\beta} \varphi_f^k \mathbf{n}_{\beta} \, d\sigma = 1 \text{ si } \beta = f, \quad 0 \text{ si } \beta \in \mathcal{B}^2, \beta \neq f$$

ou obtenu par un raisonnement analogue au cas bidimensionnel

$$(3.7) \quad \varphi_f^k(x) = \frac{1}{3|K|} (x - A), \quad x \in K,$$

illustré Figure 6, sachant qu'à trois dimensions d'espace, on a

$$(3.8) \quad \operatorname{div} x = 3.$$

- Les fonctions de base globales $(\varphi_f)_{f \in \mathcal{B}^2}$ du maillage s'obtiennent par recollage des fonctions de type (3.7). Pour $f \in \mathcal{B}^2$, son cobord $\partial^c f$ est composé des deux tétraèdres G_f et D_f

de chaque côté de la face f . on pose

11-75

$$(3.8) \varphi_f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3|G_f|} (x-A), & x \in G_f \\ -\frac{1}{3|D_f|} (x-E), & x \in D_f \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

on a alors

Prop 5 φ_f n'est continue à travers les faces δ du maillage \mathcal{T} . on a également

$$(3.9) \int_{\delta} \varphi_f \cdot n_{\delta} d\sigma = 1 \text{ si } \delta = f, 0 \text{ si } \delta \in \mathcal{T}, \delta \neq f.$$

La preuve est analogue à celle de la proposition 2.

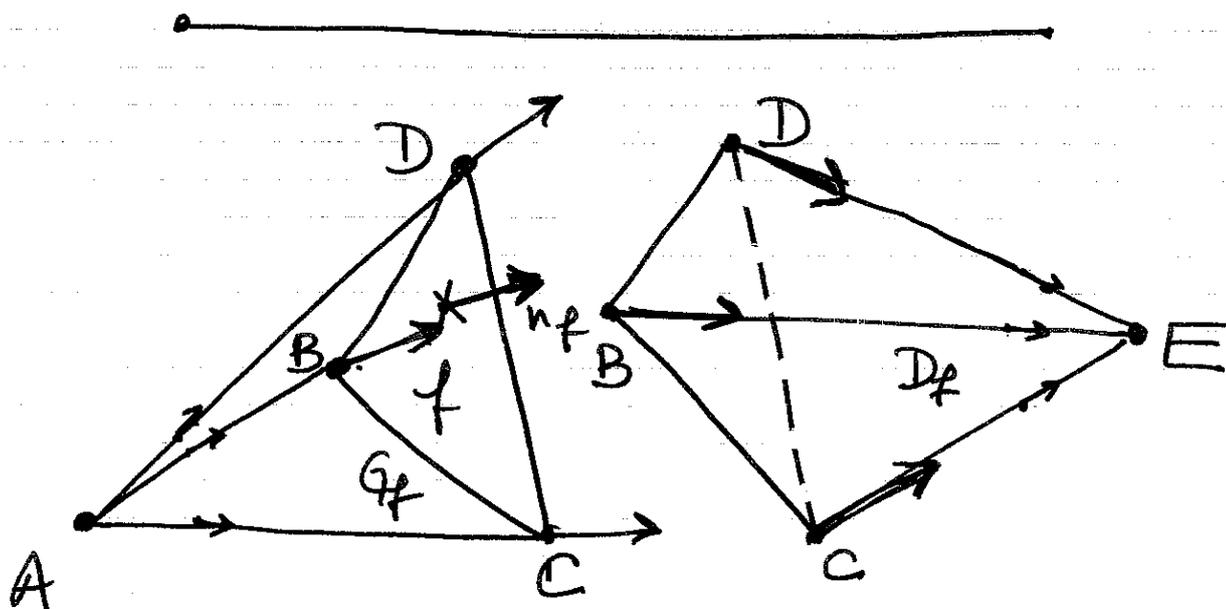


Figure 7 Vue écartée du cobord (G_f, D_f) de la face $f \in \mathcal{T}^2$ et de la fonction de base $\varphi_f \in H(\text{div}, \Omega)$.

• au pose, pour $\Omega \subset \mathbb{R}^3$,

11-16

$$(3.10) \quad H(\text{div}, \Omega, \mathcal{T}) = \langle \varphi_f, f \in \mathcal{C}^2 \rangle,$$

espace engendré par les champs précédents. On a

Prop 6 Conformité $H(\text{div})$ de l'élément RTN

$$(3.11) \quad H(\text{div}, \Omega, \mathcal{T}) \subset H(\text{div}, \Omega).$$

La preuve faite à deux dimensions d'espace s'étend sans changement à \mathbb{R}^3 . Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice.

- Notons que $(H^1(\Omega))^3 \not\subset H(\text{div}, \Omega)$, que l'élément RTN est conforme dans $H(\text{div})$ mais pas dans H^1 ; le champ φ_f ($f \in \mathcal{C}^2$) n'est pas continu; si la composante normale est bien continue à travers toute face τ du maillage, il n'en est pas de même des composantes tangentielles. Cette remarque motive et limite en même temps l'emploi des champs discrets dans $H(\text{div})$.
d'avantage toutefois est que le champ $u \in H(\text{div}, \Omega, \mathcal{T})$ est naturellement associé à des scalaires qui sont de simple flux le long des faces (ou des arêtes à deux dimensions d'espace).

Jules
31 dec 2005.