

le **cnam**

## **Champs de Vecteurs et Maillage**

Paris, 2005 - 2006

### **Cours 13**

### **Champs de vecteurs solénoïdaux (i)**

Conformité dans l'espace  $H(\text{rot})$

Élément de Nédélec - Rao

Problématique

François Dubois  
janvier 2006, 15 pages

(13)  
 ch (V)

## Champs de vecteurs solénoïdaux (i)

Cours du 11 janvier 2006

### ① Conformité dans l'espace $H(\text{rot})$

- Nous cherchons à écrire une "condition de raccord" entre deux champs de vecteurs  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  donnés respectivement de  $\Omega_1$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  et de  $\Omega_2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , réguliers de façon que le champ  $\varphi$  défini par "recollement" appartienne à l'espace fonctionnel  $H(\text{rot})$ .

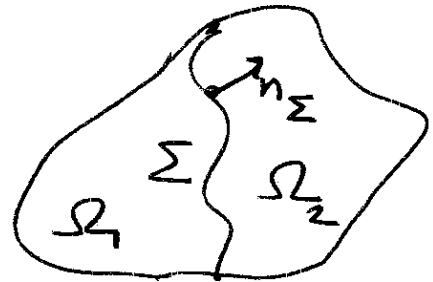


Figure 1 Domaine  $\Omega$  divisé en deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

- Nous avons d'abord

$$(1.1) \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \Sigma, \text{ surface régulière.}$$

$$(1.2) \quad \varphi_j: \overline{\Omega_j} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad j=1,2$$

et nous définissons  $\varphi$  par

$$(1.3) \quad \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in \Omega_1 \\ \varphi_2(x), & x \in \Omega_2. \end{cases}$$

- Rappelons que  $\varphi \in H(\text{rot}, \Omega)$  signifie que  $\varphi$  est un champ de vecteurs de courants intégrable, c'est à dire tel que 13-2

$$(1.4) \quad \int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 dx$$

tel que son rotationnel au sens des distributions peut être représenté par une fonction de courants intégrable  $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Travailler au sens des distributions suppose qu'on s'est donné une fonction test (ici vectorielle)  $\varphi$  très régulière et nulle en dehors d'un compact de  $\Omega$ , donc  $\varphi$  est identiquement nulle sur le bord  $\partial\Omega$  du domaine d'étude  $\Omega$ :

$$(1.5) \quad \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3, \quad \varphi \text{ régulière}, \quad \varphi|_{\partial\Omega} = 0.$$

La propriété exprime que  $\rho$  vérifie d'une part

$$(1.6) \quad \forall \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3, \quad \int_{\Omega} \varphi \cdot \text{rot} \varphi dx = \int_{\Omega} \rho \cdot \varphi dx$$

et d'autre part

$$(1.7) \quad \int_{\Omega} |\rho(x)|^2 dx < \infty.$$

- Si  $\Omega$  est borné dans  $\mathbb{R}^3$  (hypothèse toujours vérifiée dans le cadre de ce cours) et  $\varphi$  donné par (1.3) avec  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  régulières, alors la condition (1.4) est bien vérifiée; elle résulte de la propriété d'additivité de l'intégrale par

rapport au domaine et du fait que cha- que fonction  $\varphi_j$  est de carré intégrable dans  $\Omega_j$ . Il en est de même de la fonction  $\rho$  définie de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^3$  par

$$(1.8) \quad \rho(x) = \begin{cases} \text{rot } \varphi_1 & \text{dans } \Omega_1 \\ \text{rot } \varphi_2 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}$$

ce qui assure la condition (1.7) si  $\rho$  est le (un !) bon candidat satisfaisant (1.6), ce qui n'est pas encore établi.

- La difficulté est la suivante. Pour  $\Sigma$  surface régulière incluse dans  $\Omega$  et  $\xi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  champ de vecteurs défini sur  $\Sigma$ , l'application

$$(1.9) \quad (\mathcal{D}(\Omega))^3 \ni \varphi \mapsto \langle \xi \delta_\Sigma, \varphi \rangle = \int_\Sigma \xi(x) \cdot \varphi(x) d\sigma(x) \in \mathbb{R}$$

qui consiste à intégrer  $\xi \cdot \varphi$  sur la surface  $\Sigma$  est bien une distribution. Mais, de même que la masse de Dirac  $\delta$  sur  $\mathbb{R}$  ( $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ ) n'est pas une fonction, c'est à dire ne peut pas être représenté comme une intégrale  $\int_{\mathbb{R}} g \varphi dx$  avec une fonction fixée  $g$  qui ne dépend pas de  $\varphi$ , il n'existe pas de champ de vecteurs  $\beta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  de sorte que

$$\forall \varphi \in (\mathcal{D}(\Omega))^3, \quad \int_\Omega \beta(x) \cdot \varphi(x) dx = \int_\Sigma \xi \cdot \varphi d\sigma.$$

La masse de Dirac surfacique  $\xi \delta_\Sigma$  définie à la relation (1.9) n'est pas une fonction, sauf bien entendu si  $\xi \equiv 0$  sur  $\Sigma$ .

- On calcule donc le membre de gauche dans l'égalité de (1.6), qui est le rotationnel de  $\varphi$  au sens des distributions :

$$(1.10) \quad \langle \text{rot} \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \varphi \cdot \text{rot} \psi, \quad \varphi \in (\mathcal{D}'(\Omega))^3.$$

Nous avons donc, compte tenu de (1.3) et (1.10) :

$$\begin{aligned} \langle \text{rot} \varphi, \psi \rangle &= \int_{\Omega_1} \varphi_1 \cdot \text{rot} \psi + \int_{\Omega_2} \varphi_2 \cdot \text{rot} \psi \, dx \\ &= \int_{\Omega_1} \text{rot} \varphi_1 \cdot \psi \, dx + \int_{\partial \Omega_1} (\varphi_1 \times \tilde{n}_1) \psi \, d\sigma + \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \text{rot} \varphi_2 \cdot \psi \, dx + \int_{\partial \Omega_2} (\varphi_2 \times \tilde{n}_2) \psi \, d\sigma \end{aligned}$$

où  $\tilde{n}_j$  désigne la normale extérieure à  $\partial \Omega_j$ . Rappelons (voir la figure 1) que le bord de  $\partial \Omega_j$  est formé d'une part de son intersection avec le bord du domaine et d'autre part de la surface  $\Sigma$  :

$$(1.11) \quad \partial \Omega_j = (\partial \Omega \cap \partial \Omega_j) \cup \Sigma, \quad j=1,2.$$

on oriente  $\Sigma$  de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$  (voir la figure 1) de sorte qu'on a

$$(1.12) \quad \tilde{n}_1 = n_{\Sigma}, \quad \tilde{n}_2 = -n_{\Sigma}.$$

- Les intégrales de type  $\int_{\partial \Omega_j} (\varphi_j \times \tilde{n}_j) \psi \, d\sigma$  ont donc une première contribution sur  $\partial \Omega \cap \partial \Omega_j$  qui est nulle car  $\varphi$  est nulle au bord (cf (1.5)) et une seconde contribution sur  $\Sigma$  qui donne lieu à des signes alternés. Compte tenu

par ailleurs de la définition (1.8) du champ de vecteurs  $\rho$ , on a

$$\langle \text{rot} \varphi, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \rho \cdot \varphi \, dx + \int_{\Sigma} (\varphi_1 \times n_{\Sigma} - \varphi_2 \times n_{\Sigma}) \varphi \, d\sigma,$$

relation qu'on peut réécrire, en introduisant le saut de la composante tangentielle (nommé de  $\Pi_2$ ) du champ de vecteurs  $\varphi$  à la traversée de  $\Sigma$ , ie

$$(1.13) \quad [\varphi \times n] \equiv (\varphi_2 - \varphi_1) \times n_{\Sigma} \quad \text{sur } \Sigma,$$

sous la forme

$$(1.14) \quad \langle \text{rot} \varphi, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \rho \varphi \, dx - \int_{\Sigma} [\varphi \times n] \varphi \, d\sigma, \quad \varphi \in (D(\Omega))^3.$$

- La distribution (1.14) n'est une fonction (n'est représentable par une fonction) que si le saut  $[\varphi \times n]$  de la composante tangentielle est nul. Nous retenons

### Prop (1) Continuité $H(\text{rot})$

Un champ de vecteurs  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  défini par morceaux via (1.3) et des fonctions régulières  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  appartient à l'espace  $H(\text{rot}, \Sigma)$  si et seulement si le saut de sa composante tangentielle est nul sur  $\Sigma$ :

$$(1.15) \quad [\varphi \times n]_{\Sigma} = 0.$$

## ② Élément de Nédélec - Rao.

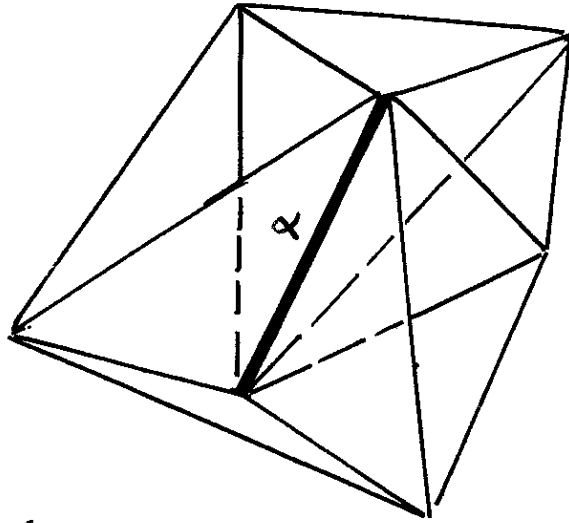


Figure 2 Représentation de l'ensemble des tétraèdres d'un maillage qui contiennent une arête  $\alpha$  donnée

- Soit  $K$  un tétraèdre  $K=(A,B,C,D)$ ,  $\alpha$  l'arête  $(A,B)$  (pour fixer les idées) orientée de  $A$  vers  $B$ ,  $I$  le milieu de  $(A,B)$  et  $J$  le milieu de  $(C,D)$ . Nous avons vu à la leçon précédente que la fonction vectorielle  $\varphi_\alpha^K$  définie par

$$(2.1) \quad \varphi_\alpha^K(M) = \frac{\vec{CD} \times \vec{JM}}{(\vec{JI}, \vec{AB}, \vec{CD})}, \quad M \in K, \quad \alpha = (A,B)$$

satisfait à

$$(2.2) \quad \varphi_\alpha^K \in P \equiv \{v(x), \exists \varphi, \xi \in \mathbb{R}^3, \forall x, v(x) = \varphi + \xi \times x\}$$

$$(2.3) \quad \int_\beta \varphi_\alpha^K(x) \cdot \tau_\beta \, ds = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \text{ arêtes de } K.$$

Voir la figure 3, page suivante.

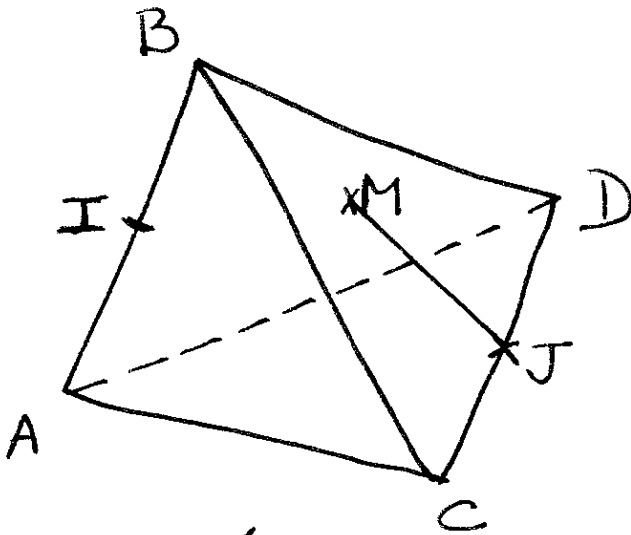


Figure 3. Éléments caractéristiques pour la fonction de base  $\varphi_\alpha^K$  dans le tétraèdre  $(A, B, C, D)$ .

Prop 2) Faces opposées.

Soit  $\varphi_\alpha^K$  comme exposé plus haut et  $f$  l'une des deux faces ne contenant pas l'arête  $\alpha$ . Alors

$$(2.4) \quad \varphi_\alpha^K \times n_f = 0.$$

Preuve

Compte tenu des notations rappelées à la figure 3, la face  $f$  est égale à  $(A, D, C)$  ou  $(B, C, D)$ . Si  $M \equiv x$  appartient à la face  $(B, C, D)$  pour fixer les idées, le vecteur  $x - J$  (noté  $\vec{JM}$  avec la notation fléchée traditionnelle) est tangent à cette face, donc le vecteur  $\vec{CD} \times \vec{JM}$ , proportionnel à  $\varphi_\alpha^K$  (relation (2.1)) est normal à la face  $(B, C, D)$ . D'en résulte la relation (2.4).  $\square$

Prop 3) Faces contenant l'arête

Soit  $\varphi_\alpha^K$  comme plus haut et  $f$  une face du tétraèdre contenant l'arête  $\alpha$ . Alors (2.4) a encore lieu



## Preuve de la proposition (3)

13-8

Analogue à celle de la proposition 2. Si on prend par exemple  $f = (A, B, C)$  pour fixer les idées, on remarque que  $\vec{JC} \times \vec{CD} = 0$ , donc  $\varphi_{\alpha}^K(x)$  est proportionnel à  $\vec{CD} \times \vec{CM}$ . Si  $M$  appartient à la face  $f$ , le vecteur  $\vec{CM}$  est tangent à cette face, donc  $\vec{CD} \times \vec{CM}$  est normal et  $\varphi_{\alpha}^K \times n_f = 0$ .  $\square$

**Def** des fonctions de base de l'élément d'arête.

Soit  $\mathcal{T}$  un maillage simplicial du domaine  $\Omega$ ,  $\alpha$  une arête intérieure (pour simplifier l'exposé uniquement!) au maillage ( $\alpha \in \mathcal{T}^1$ ). Si  $K \in \mathcal{T}^3$  désigne un tétraèdre contenant l'arête  $\alpha$  dans son bord (Figure 2), on dispose de la fonction  $\varphi_{\alpha}^K$  définie en (2.1), une fois l'orientation de  $\alpha$  choisie on pose alors

$$(2.5) \quad \varphi_{\alpha}(x) = \begin{cases} \varphi_{\alpha}^K(x), & x \in K, K \in \mathcal{T}^3, \alpha \subset \partial K \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Prop (4)** Conformité  $H(\text{rot})$  des vecteurs  $\varphi_{\alpha}$ .

Soit  $\alpha \in \mathcal{T}^1$ , arête du maillage  $\mathcal{T}$  comme plus haut et  $\varphi_{\alpha}$  définie à la relation (2.5). on a

$$(2.6) \quad \varphi_{\alpha} \in H(\text{rot}, \Omega).$$

L

## Preuve de la proposition (4)

La fonction  $\varphi_\alpha$  est définie "par morceaux" dans chaque tétraèdre  $K$  et  $\varphi_\alpha^K$  est régulière puis, qu'elle y est polynomiale. Compte tenu de la proposition 1 et de la relation (1.15), la propriété équivaut à dire que le saut de la composante tangentielle de  $\varphi_\alpha$  à travers les faces  $f$  du maillage est nul, ce quel que soit  $f \in \mathcal{B}^2$ , or pour toute face  $f$  de  $K$ ,  $\varphi_\alpha^K \times \tilde{n}_f = 0$  compte tenu des propositions 2 et 3. De part et d'autre d'une face  $f \in \mathcal{B}^2$  donnée, on a donc  $\varphi_\alpha \times n_f = 0$  et la relation (1.15) a donc lieu à fortiori. D'où la propriété.  $\square$

Nous retenons la propriété

$$(2.7) \quad \varphi_\alpha \times n_f = 0, \forall \alpha \in \mathcal{B}^1, \forall f \in \mathcal{B}^2,$$

plus "forte" que la continuité  $H(\text{rot})$  proposée en (2.6).

## Def) Espace $NR(\Omega, \mathcal{C})$

on appelle  $NR(\Omega, \mathcal{C})$  l'espace vectoriel engendré par les fonctions vectorielles  $\varphi_\alpha$  introduites en (2.5), avec  $\alpha$  nœud du maillage  $\mathcal{C}$ :

$$(2.8) \quad NR(\Omega, \mathcal{C}) = \langle \varphi_\alpha, \alpha \in \mathcal{C}^1 \rangle.$$

Cette notation rend hommage aux nœuds (indépendants!) de cet espace, JCL Nédélec en

1980 et S.M. Rao en 1982.

- Compte tenu de la relation (2.6) et de (2.8), on a la propriété fondamentale

$$(2.9) \quad NR(\Omega, \bar{\sigma}^1) \subset H(\text{rot}, \Omega).$$

### ③ Problématique

- On suppose pour la fin de ce cours que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , à frontière  $\partial\Omega$  polygonale convexe et connexe. On suppose également  $\Omega$  simplement connexe. Un champ de vecteurs  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  est dit solénoïdal lorsque

$$(3.1) \quad \text{div} u = 0.$$

- alors les deux espaces  $M'_0(\Omega)$  et  $M'_x(\Omega)$  de champs de vecteurs harmoniques sont réduits à 0, la représentation à l'aide de potentiels

$$(3.2) \quad u = \Pi'_x u + \nabla \varphi_0 + \text{rot} \psi_0, \quad \varphi_0 \in H'_0, \quad \psi_0 \in H'_0(\Omega, \bullet)$$

$$(3.3) \quad u = \Pi'_0 u + \nabla \varphi_x + \text{rot} \psi_x, \quad \varphi_x \in H^1, \quad \psi_x \in H'_0(\Omega, x)$$

où  $\Pi'_0$  et  $\Pi'_x$  sont les projecteurs sur  $M'_0$  et  $M'_x$ , et

$$(3.4) \quad H'_0(\Omega, \bullet) = \{ \xi \in (H^1(\Omega))^3, \text{div} \xi = 0, \xi \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \Pi'_0 \xi = 0 \}$$

$$(3.5) \quad H'_0(\Omega, x) = \{ \xi \in (H^1(\Omega))^3, \text{div} \xi = 0, \xi \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \Pi'_x \xi = 0 \}$$

prend la forme simple

$$(3.6) \quad u = \text{rot } \psi, \quad \psi \in H'_{00}(\Omega, \bullet)$$

$$(3.7) \quad u = \text{rot } \psi_x, \quad \psi_x \in H'_{00}(\Omega, x)$$

qui peuvent d'introduire un potentiel vecteur  $\psi$  ou  $\psi_x$  dans  $H^1$ , à divergence nulle (condition de jauge classique), tangent sur le bord ( $\psi \cdot n = 0$  si  $\psi \in H'_{00}(\Omega, \bullet)$ ) ou normal au bord ( $\psi_x \times n = 0$  si  $\psi_x \in H'_{00}(\Omega, x)$ ).

- Nous nous donnons un maillage  $\mathcal{T}$  de  $\Omega$ , les fonctions de base  $\xi_f$  de Raviart-Thomas-Nedelec, paramétrées par les faces  $f \in \mathcal{T}^2$  du maillage

$$(3.8) \quad \xi_f \in H(\text{div}, \Omega), \quad f \in \mathcal{T}^2$$

et l'espace vectoriel  $\text{RTN}(\Omega, \mathcal{T}^2)$  engendré par ces champs de vecteurs :

$$(3.9) \quad \text{RTN}(\Omega, \mathcal{T}^2) = \langle \xi_f, f \in \mathcal{T}^2 \rangle.$$

Un champ de vecteurs  $u \in \text{RTN}(\Omega, \mathcal{T}^2)$  appartient à  $H(\text{div}, \Omega)$ , dépend de  $\#\mathcal{T}^2$  paramètres (le nombre de faces du maillage) et les coefficients  $u_f$  de  $u$  dans la décomposition sur la base  $\xi_f$  :

$$(3.10) \quad u = \sum_{f \in \mathcal{T}^2} u_f \xi_f \in \text{RTN}(\Omega, \mathcal{T}^2)$$

sont exactement les flux de  $u$  contre les triangles

$$(3.11) \quad u_f = \int_f u \cdot n_f \, d\sigma, \quad f \in \mathcal{T}^2.$$

- on a donc  $\text{div} u$  constant par élément  $K$ .

$$(3.12) \quad |K| \text{div} u|_K = \sum_{f \in \mathcal{F}^K} \varepsilon_f^K \left( \int_f u \cdot n_f d\sigma \right), \quad K \in \mathcal{T}^3$$

où  $\varepsilon_f^K \in \{-1, +1\}$  est le nombre d'incidence de  $f$  relativement au tétraèdre  $K$ :  $\varepsilon_f^K = +1$  si la normale  $n_f$  à la face  $f$  est extérieure au tétraèdre  $K$ ,  $\varepsilon_f^K = -1$  dans le cas contraire.

- on peut écrire que  $u$  est solénoïdal en annulant  $\text{div} u$  dans chaque élément, ce qui conduit à écrire les relations

$$(3.13) \quad \sum_{f \in \mathcal{F}^K} \varepsilon_f^K u_f = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}^3.$$

Nous définissons l'espace  $\text{RTN}_0(\Omega, \mathcal{T}^2)$  comme le sous-espace de  $\text{RTN}$  des champs de vecteurs à divergence nulle, où les relations (3.13) ont lieu. On remarque qu'alors

$$(3.14) \quad u|_K = \text{constante}, \quad \forall u \in \text{RTN}_0(\Omega, \mathcal{T}^2)$$

ou la forme particulière

$$(3.15) \quad u^K(x) = \text{constante} + \frac{1}{3|K|} (\text{div} u)_K x, \quad x \in K$$

du champ interpolant.

- Si les relations (3.13) sont linéairement indépendantes, on doit avoir la propriété:

$$(3.16) \quad \dim \text{RTN}_0(\Omega, \mathcal{T}^2) = \#\mathcal{T}^2 - \#\mathcal{T}^3.$$

puisque un champ à divergence nulle sur  $\Omega$  pose une relation par tétraèdre. 13-13

- Par ailleurs, nous disposons de l'espace  $NR(\Omega, \mathcal{T}')$  inclus dans  $H(\text{rot})$  [et pas nécessairement dans  $H^1$ !] des champs  $\psi$  définis par leur circulation sur les arêtes

$$(3.17) \quad \psi = \sum_{d \in \mathcal{T}'} \psi_d \quad \psi_d \in NR(\Omega, \mathcal{T}')$$

$$(3.18) \quad \psi_d = \int_d \psi \cdot \tau_x \, ds, \quad d \in \mathcal{T}'.$$

Dans chaque élément  $K \in \mathcal{T}^3$  du maillage, nous avons

$$(3.18) \quad \psi|_K \in \mathcal{P}, \quad \psi|_K(x) = \alpha_K + \beta_K \times x, \quad x \in K$$

et

$$(3.19) \quad \text{rot} \psi|_K = 2\beta_K = \text{constante}.$$

- Nous rapprochons (3.19) de (3.15) pour chercher les champs de vecteurs précédents sous la forme

$$(3.20) \quad u = \text{rot} \psi, \quad \psi \in NR(\Omega, \mathcal{T}')$$

En effet, un tel champ est nécessairement à divergence nulle ( $\text{div}(\text{rot}) \equiv 0$ ) et est constant par élément. Par contre, si on a

$$(3.21) \quad \dim NR(\Omega, \mathcal{T}') = \#\mathcal{T}',$$

la relation d'Euler-Poincaré dans un tel ouvert  $\Omega$ , à savoir

$$(3.22) \quad \#T^0 - \#T^1 + \#T^2 - \#T^3 = 1$$

indique que les espaces  $RTN_0(\Omega, T^2)$  et  $NR(\Omega, T^1)$  n'ont pas la même dimension, même si

$$(3.22) \quad \text{rot } NR(\Omega, T^1) \subset RTN_0(\Omega, T^2)$$

comme nous venons de le démontrer. Il convient donc d'étudier le noyau du rotationnel dans l'espace  $NR(\Omega, T^1)$

$$(3.23) \quad \ker \text{rot} = \{ \psi \in NR(\Omega, T^1), \text{rot } \psi = 0 \}$$

afin de comprendre comment paramétrer l'espace  $RTN_0(\Omega, T^2)$  avec certaines arêtes du maillage. Ceci constitue le choix d'une jauge discrète qui sera développée à la leçon suivante.

Versailles, 15-janvier 06.

J.