

le **cnam**

Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

Cours 14

Champs de vecteurs solénoïdaux (ii)

Rappels de théorie des graphes

Champs solénoïdaux de flux nul au bord

François Dubois

janvier 2006, 15 pages

CVM

14

d. V

Champs de vecteurs réels (ii)

Cours du 18 janvier 2006

① Rappels de théorie des graphes.

- La théorie des graphes utilise des éléments tout à fait premiers de la théorie des ensembles. Si E et F sont deux ensembles, rappelons que $E \times F$, le produit cartésien de E et de F est l'ensemble des couples (x, y) où x appartient à E et y à F :

$$(1.1) \quad E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}.$$

- Par définition, un graphe G est une partie des produit cartésien $E \times F$:

$$(1.2) \quad \text{graphe } G: \quad G \subseteq E \times F.$$

Un graphe est dit fonctionnel si pour tout x appartenant à E , il existe au plus un élément y dans F de sorte que $(x, y) \in G$:

$$(1.3) \quad G \subseteq E \times F \text{ fonctionnel, } \forall x \in E, \text{ il existe au plus un } y \in F, (x, y) \in G.$$

Pour $x \in E$, il existe $y \in F$ de sorte que $(x, y) \in G$, on a l'habitude d'écrire cet élément $y = f(x)$, et construire ce faisant la fonction

f de E dans l'ensemble F . Pour x fixé dans E , ou bien $f(x)$ n'existe pas, c'est à dire $\forall y \in F, (x,y) \notin G$, ou bien $y=f(x)$ existe et est unique dans G : $\exists! y \in F, (x,y) \in G$.

- Lorsque pour tout $x \in E$, il existe un et un seul $y \in F$ de sorte que (x,y) appartienne au graphe G , on dit que le graphe G est applicatif. L'unique $y \in F$ tel que $(x,y) \in G$ est noté $f(x)$ et définit l'application f qu'on note aussi

$$(1.4) \quad E \ni x \mapsto y = f(x) \in F.$$

- Lorsque les ensembles F et E sont égaux, on parle aussi de relation entre les éléments de E . Une relation est donc par définition la donnée d'un ensemble E et d'une partie G de $E \times E$. On peut représenter à l'aide d'une flèche $x \rightarrow y$ la relation entre x et y , ie le fait que $(x,y) \in G$. Ainsi si par exemple $E = \{a,b,c\}$ et $G = \{(a,a), (a,b), (b,c)\}$, on peut construire les trois "héris", les trois flèches entre les objets a, b, c de l'ensemble E (Figure 1).

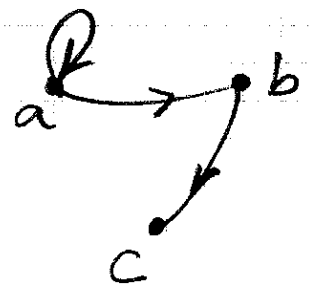


Figure 1. Une relation dans l'ensemble $\{a, b, c\}$

- Un graphe $G \subset E \times E$ est dit symétrique si $x \rightarrow y$ entraîne toujours $y \rightarrow x$:

(1.5) $G \subset E \times E$ symétrique: $\forall x \in E, (x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \in G$

Le graphe G de la figure 1 n'est pas symétrique. Nous n'aborderons pas ici la notion d'équivalence et d'ordre qui sont des constructions mathématiques qui découlent des notions précédentes.

- Nous retiendons qu'un graphe dans un ensemble E est la donnée de flèches au sein de E (de couples $(x,y) \in G \subset E \times E$). Le graphe est symétrique si (1.5) a lieu. Il est antisymétrique lorsque

(1.6) $G \subset E \times E$ antisymétrique: $\forall x \neq y \in E, (x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \notin G$

l'existence d'une flèche de x vers y ($x \neq y$) interdit l'existence de la flèche opposée de y vers x . On parle aussi de graphe orienté dans le contexte des maillages par complexes simpliciaux qui sous-tend ce cours sur les maillages.

- Pour E ensemble fixé et x, y éléments de E ($x \neq y$) munis d'un graphe G donné on dit qu'il existe un chemin Γ de G allant de x à y si (cf Figure 2)

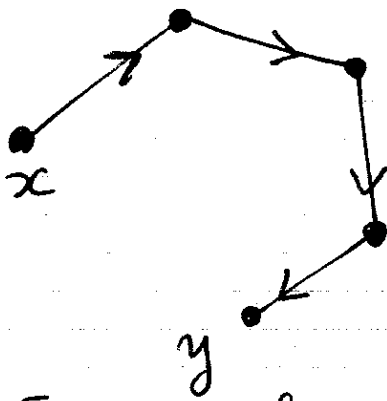


Figure 2 chemin Γ
allant de x à y

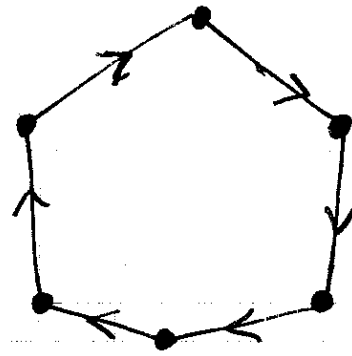


Figure 3 Cycle P relative-
vement au graphe G .

(1.7) $\left\{ \begin{array}{l} \exists n \in \mathbb{N}, \exists x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y \in E \text{ tous} \\ \text{différents, tels que } \forall i = 0, \dots, n-1, (x_i, x_{i+1}) \in G. \end{array} \right.$

ou dit que le graphe $G \subset E \times E$ est connexe si pour tout $(x, y) \in E \times E, x \neq y$, il existe un chemin Γ allant de x à y .

- L'ensemble E est toujours muni du graphe G . Une partie P de E est un cycle relativement au graphe G (comportant au moins trois éléments) si quel que soit $x \neq y$ appartenant tous deux à l'ensemble P , il existe un chemin (de G) allant de x à y et formé de sommets appartenant à P .

(1.8) P-cycle $\left\{ \begin{array}{l} \#P \geq 3 \\ \forall x \neq y \in P, \exists \text{ chemin } \Gamma \text{ allant de } x \text{ à } y \\ \forall x, y \in \Gamma, x, y \in P. \end{array} \right.$

14-5

Comme les éléments du chemin sont tous différents (relation (1-7)), on peut se convaincre facilement que

$$(1-9) \quad \#(G \cap (P \times P)) = \#P.$$

Un cycle P comporte autant de sommets que de liens dans le graphe. Le lecteur peut aussi consulter l'ouvrage de Claude Berge: "Graphes et Hypergraphes", Dunod, Paris (1970).

- Une partie A d'un graphe G (sur l'ensemble E) est un arbre maximal extrait du graphe G (Figure 4) si E uni de ce graphe A est connexe et ne comporte pas de cycle. On a alors

$$(1-10) \quad \#A = \#E - 1$$

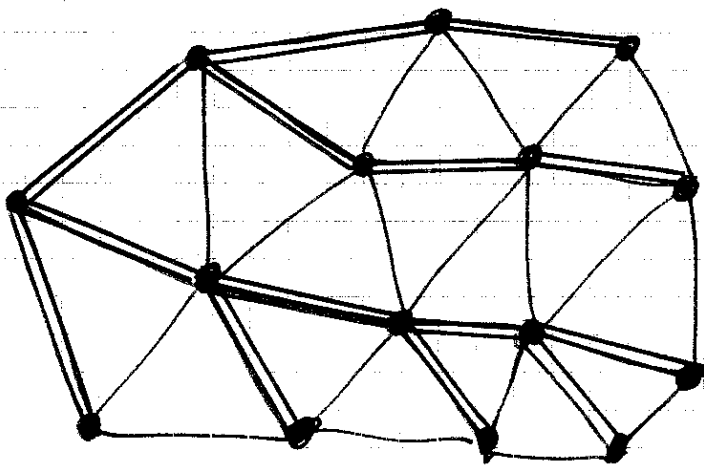


Figure 4 Arbre maximal A (arêtes en double trait) extrait du graphe G (arêtes en simple trait)

on ne compte qu'une seule fois chaque arête non orientée (x,y) ou (y,x) . on a aussi les propositions suivantes, démontrées dans l'ouvrage de C. Berge, dont l'illustration Figure 4 est donnée :

(Prop) (1) Si on enlève une arête à un arbre maximal A , il n'est plus connexe

(Prop) (2) Si on ajoute une arête $\alpha \in G$ à un arbre maximal, alors le graphe $A \cup \{\alpha\}$ contient un cycle.

• Concernant la nomenclature, le mot "arête" s'applique à des graphes symétriques pour lesquels on peut identifier les couples (x,y) et (y,x) qui, pour $x \neq y$, appartiennent tous deux au graphe G .

(1.11) } arête α d'un graphe G symétrique reliant
 $x \neq y \in E$, $\alpha = \{(x,y)\} \cup \{(y,x)\} \subset G$.

Le mot d'arête orientée désigne simplement un lien $(x,y) \in G$ avec $x \neq y$ par un graphe G antisymétrique.

② Champs solénoïdaux de flux nul au bord.

- On se donne Ω ouvert borné de \mathbb{R}^3 à frontière $\partial\Omega$ polyédrique et \mathcal{T} un maillage de Ω à l'aide de tétraèdres. On a construit lors des leçons précédentes un espace $RTN(\Omega, \mathcal{T}^2)$ engendré par les "fonctions de facettes" ξ_f pour f face triangulaire du maillage \mathcal{T} on a

$$(2.1) \quad RTN(\Omega, \mathcal{T}^2) \subset H(\text{div}, \Omega), \quad \dim RTN(\Omega, \mathcal{T}^2) = \# \mathcal{T}^2.$$

on a introduit également l'espace $RTN_0(\Omega, \mathcal{T}^2)$ des champs $\xi \in RTN(\Omega, \mathcal{T}^2)$ à divergence nulle

$$(2.2) \quad \xi \in RTN_0(\Omega, \mathcal{T}^2) \iff \xi \in RTN(\Omega, \mathcal{T}^2), \text{div } \xi = 0$$

et nous avons vu que

$$(2.3) \quad \dim RTN_0(\Omega, \mathcal{T}^2) = \# \mathcal{T}^2 - \# \mathcal{T}^3.$$

- Nous introduisons maintenant le sous-espace de RTN_0 des champs de vecteurs ξ qui sont en plus de flux nul au bord

$$(2.4) \quad \xi \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

on pose

$$(2.5) \quad \mathcal{T}_0^2 = \{ \text{faces } f \in \mathcal{T}^2, f \not\subset \partial\Omega \},$$

$$(2.6) \quad RTN(\Omega, \mathcal{T}_0^2) = \{ \xi = \sum_{f \in \mathcal{T}_0^2} \xi_f \},$$

$$(2.7) \quad \text{RTN}_0(\Omega, \mathcal{C}_0^2) = \text{RTN}(\Omega, \mathcal{C}_0^2) \cap \text{RTN}_0(\Omega, \mathcal{C}_0^2).$$

Les degrés de liberté de $\text{RTN}(\Omega, \mathcal{C}_0^2)$ sont nuls sur les faces du bord. Donc la condition (2.4) est automatiquement vérifiée

$$(2.8) \quad \xi \in \text{RTN}(\Omega, \mathcal{C}_0^2) \Rightarrow \xi \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Prop 3 Dimension des espaces $\text{RTN}(\Omega, \mathcal{C}_0^2)$ et $\text{RTN}_0(\Omega, \mathcal{C}_0^2)$

$$(2.9) \quad \dim \text{RTN}(\Omega, \mathcal{C}_0^2) = \#\mathcal{C}_0^2$$

$$(2.10) \quad \dim \text{RTN}_0(\Omega, \mathcal{C}_0^2) = \#\mathcal{C}_0^2 - \#\mathcal{C}^3 + 1.$$

preuve de la proposition (3).

- La relation (2.9) est claire, puisque d'après la définition (2.6), $\text{RTN}(\Omega, \mathcal{C}_0^2) = \langle \xi_f, f \in \mathcal{C}_0^2 \rangle$ et que les fonctions ξ_f sont indépendantes.
- Pour la relation (2.10), on remarque que les $\#\mathcal{C}^3$ formes linéaires S_K ($K \in \mathcal{C}^3$):

$$(2.11) \quad \text{RTN}(\Omega, \mathcal{C}_0^2) \ni u \mapsto \langle S_K, u \rangle = \int_K \text{div} u \, dx \in \mathbb{R}$$

sont dépendants. En effet, pour $u \in \text{RTN}(\Omega, \mathcal{C}_0^2)$, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{C}^3} \langle S_K, u \rangle &= \sum_{K \in \mathcal{C}^3} \int_K \text{div} u \, dx = \int_{\Omega} \text{div} u \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} u \cdot n \, d\sigma = \sum_{f \in \mathcal{C}^2, f \subset \partial\Omega} \int_f u \cdot n_f \, d\sigma = 0 \end{aligned}$$

car $u_0|_{\Gamma_f} = 0$ pour les faces du bord de Ω .

- Nous montrons maintenant que si on excepte un tétraèdre K_0 , la famille $\{\delta_K, K \neq K_0\}$ est libre. Si $(\alpha_K)_{K \neq K_0}$ désigne une famille de réels, nous supposons

$$(2.12) \quad \sum_{K \in \mathcal{T}^3, K \neq K_0} \alpha_K \delta_K = 0$$

c'est à dire

$$(2.13) \quad \sum_{K \neq K_0} \alpha_K \int_K \operatorname{div} u = 0, \forall u \in RTN(\Omega, \mathcal{T}_0^2)$$

Nous fixons un tétraèdre $K_1 \in \mathcal{T}^3$ différent de K_0 et considérons la fonction $\varphi_{K_1} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ définie par le problème de Neumann suivant

$$(2.14) \quad -\Delta \varphi_{K_1} = \begin{cases} \frac{1}{|K_1|} \alpha_{K_1} & x \in K_1 \\ -\frac{1}{|K_0|} \alpha_{K_1} & x \in K_0 \\ 0 & x \in K \neq K_0, K_1 \end{cases}$$

$$(2.15) \quad \frac{\partial \varphi_{K_1}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Cette fonction existe bien (et est unique!) puisque l'intégrale du chargement (membre de droite de (2.14)) est nul:

$$\left(\frac{1}{|K_1|} \alpha_{K_1}\right) |K_1| + \left(-\frac{1}{|K_0|} \alpha_{K_1}\right) |K_0| = 0.$$

Pour φ_{K_1} défini plus haut, on peut se convaincre (c'est technique, mais vrai!) qu'alors les intégrales

$$(2.16) \quad \tilde{u}_{K_1, f} \equiv \int_f \nabla \varphi_{K_1} \cdot n_f \, d\sigma, \quad f \in \mathcal{B}^2$$

sont bien définies. Alors la somme

$$(2.17) \quad u_{K_1} \equiv \sum_{f \in \mathcal{B}^2} \tilde{u}_{K_1, f} \, \varepsilon_f$$

appartient à $RTN(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$ puisque, à cause de la condition de Neumann homogène,

$$\tilde{u}_{K_1, f} = 0 \text{ si } f \subset \partial\Omega.$$

- on a alors le calcul suivant, pour $K \in \mathcal{B}^3$

$$\int_K \operatorname{div} u_{K_1} \, dx = \sum_{f \in \partial K} \varepsilon_f^K \int_f \nabla \varphi_{K_1} \cdot n_f \, d\sigma = \int_K \Delta \varphi_{K_1} \, dx$$

donc $\langle \delta_K, u_{K_1} \rangle = 0$ si $K \in \mathcal{B}^3$ et $K \neq K_1, K \neq K_0$

alors que $\langle \delta_{K_1}, u_{K_1} \rangle = \alpha_{K_1}$ compte tenu de (2.14):

$$(2.18) \quad \langle \delta_K, u_{K_1} \rangle = \begin{cases} \alpha_{K_1} & , K = K_1 \\ 0 & , K \in \mathcal{B}^3, K \neq K_0, K_1 \end{cases}$$

- Par suite, $\sum_{K \neq K_0} \alpha_K \langle \delta_K, u_{K_1} \rangle = (\alpha_{K_1})^2$. Or cette somme est nulle a priori compte tenu de l'hypothèse (2.12). Donc α_{K_1} et on peut reprendre ce raisonnement pour tout élément $K_1 \neq K_0$ du maillage. La famille $(\delta_K)_{K \neq K_0}$ est donc libre et on impose $(\#\mathcal{B}^3 - 1)$ relations indépendantes pour définir $RTN_0(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$ à partir de $RTN(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$. \square

- on cherche à construire une base de $RTN_0(\Omega, \mathcal{T}_0^2)$ facile à manipuler. On introduit l'espace $NR(\Omega, \mathcal{T}_0^1)$ des champs de vecteurs de $H(\text{rot})$ engendré par la famille des $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{E}^1}$ exposé aux leçons précédentes. On pose comme plus haut

$$(2.19) \quad \mathcal{T}_0^1 = \{ \alpha \in \mathcal{E}^1, \alpha \not\subset \partial\Omega \}$$

l'ensemble des arêtes qui n'appartiennent pas au bord, puis

$$(2.20) \quad NR(\Omega, \mathcal{T}_0^1) = \langle \varphi_\alpha, \alpha \in \mathcal{T}_0^1 \rangle.$$

(Prop) (4) on a

$$(2.21) \quad \text{rot} [NR(\Omega, \mathcal{T}_0^1)] \subset RTN_0(\Omega, \mathcal{T}_0^2).$$

preuve de la proposition (4)

- soit α une arête qui n'appartient au bord de Ω et posons $u_\alpha = \text{rot} \varphi_\alpha$. Alors

$$(2.22) \quad \text{rot} \varphi_\alpha \in RTN(\Omega, \mathcal{T}_0^2).$$

En effet, $\text{rot} \varphi_\alpha$ est un champ de vecteurs constant dans chaque tétraèdre $K \in \mathcal{T}_0^3$. Il appartient donc à l'espace $P = \{ \mathcal{I} + \gamma x, \mathcal{I} \in \mathbb{R}^3, \gamma \in \mathbb{R} \}$ quand on le considère dans chaque tétraèdre. De plus les flux $\int_P \text{rot} \varphi_\alpha \cdot d\sigma$ se calculent sans difficulté :

$$\int_f \operatorname{rot} \varphi_\alpha \cdot n_f \, d\sigma = \sum_{\beta \in \mathcal{B}^1, \beta \subset \partial f} \varepsilon_\beta^f \int_\beta \varphi_\alpha \cdot \tau_\beta \, ds. \quad 14-12$$

Mais $\int_\beta \varphi_\alpha \cdot \tau_\beta \, ds = 0$ sauf si $\beta = \alpha$, auquel cas il vaut 1. Par ailleurs le nombre d'incidence ε_α^f vaut +1 si $\alpha \subset \partial f$ et les orientations de α et induite par n_f sur ∂f coïncident, -1 si $\alpha \subset \partial f$ si les deux orientations précédentes sont opposées. On pose aussi par convention ε_α^f si $\alpha \not\subset \partial f$. on tire alors des considérations précédentes

$$(2.23) \quad \int_f \operatorname{rot} \varphi_\alpha \cdot n_f \, d\sigma = \varepsilon_\alpha^f, \quad \alpha \in \mathcal{B}^1, \quad f \in \mathcal{B}^2.$$

- on en déduit que si f est une face du bord, le degré de liberté correspondant de $\operatorname{rot} \varphi_\alpha$ est nul. Donc $n_\alpha = \operatorname{rot} \varphi_\alpha \in \operatorname{RTN}_0(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$ puisque cette fonction est clairement à divergence nulle. \square

- Nous allons comparer les dimensions des espaces mis en jeu; nous posons d'abord

$$(2.24) \quad \mathcal{B}^1(\Omega) = \{ \alpha \in \mathcal{B}^1, \alpha \subset \partial \Omega \}$$

$$(2.25) \quad \mathcal{B}^2(\Omega) = \{ f \in \mathcal{B}^2, f \subset \partial \Omega \}$$

$$(2.26) \quad \mathcal{B}^0(\Omega) = \{ S \in \mathcal{B}^0, S \in \Omega \}$$

$$(2.27) \quad \mathcal{B}_0^0(\Omega) = \{ S \in \mathcal{B}^0, S \notin \Omega \}$$

Avec les hypothèses faites sur Ω (convexe, simplement

connexes, à frontière connexe), on a

Prop (5) Caractéristique d'Euler-Poincaré du bord

$$(2.28) \chi(\partial\Omega) \equiv \# \sigma^0(\partial\Omega) - \# \sigma^1(\partial\Omega) + \# \sigma^2(\partial\Omega) = 2$$

Preuve de la proposition (5)

Par invariance de la caractéristique d'Euler-Poincaré par raffinement du maillage, il suffit de prouver (2.28) pour un tétraèdre. On en a dans ce cas (la frontière d')

$$\chi(\partial\Omega) = 4 - 6 + 4 = 2. \quad \square$$

Prop (6) Caractéristique résiduelle
Avec les hypothèses (les plus simples!) faites sur Ω , on a:

$$(2.29) \# \sigma_0^0 - \# \sigma_0^1 + \# \sigma_0^2 - \# \sigma_0^3 = -1$$

• on sait qu'on dispose de la caractéristique d'Euler-Poincaré pour le domaine complet

$$(2.30) \chi(\Omega) \equiv \# \sigma^0 - \# \sigma^1 + \# \sigma^2 - \# \sigma^3 = 1$$

et on a les relations aux différences

$$(2.31) \# \sigma_0^k = \# \sigma^k - \# \sigma^k(\partial\Omega), \quad k=0,1,2.$$

La relation (2.29) résulte alors de (2.30) et (2.31). \square

Prop (7) Dimensions.

$$(2.32) \dim NR(\Omega, \mathcal{C}'_0) = \dim RTN_0(\Omega, \mathcal{C}^2_0) + \# \mathcal{C}^0_0$$

preuve de la proposition (7).

- Elle résulte de la relation (2.10), de la propriété claire

$$(2.33) \dim NR(\Omega, \mathcal{C}'_0) = \# \mathcal{C}'_0$$

et de la relation (2.29), qui on peut écrire :

$$\# \mathcal{C}'_0 = \# \mathcal{C}^0_0 + \# \mathcal{C}^2_0 - \# \mathcal{C}^3_0 + 1,$$

ce qui correspond exactement à (2.32) compte tenu de (2.10). \square

Versailles, 22 janvier 06
J