

le **cnam**

Champs de Vecteurs et Maillage

Paris, 2005 - 2006

Cours 15

Champs de vecteurs solénoïdaux (iii)

Espaces discrets

Base des champs solénoïdaux

François Dubois

janvier 2006, 13 pages

CVM (15)

ch (V) champs de vecteurs solénoïdaux (iii)

Cours du 25 janvier 2006

① Espaces discrets.

- La lettre Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^3 à frontière polyédrique, notée $\partial\Omega$. On le suppose connexe, simplement connexe et $\partial\Omega$ connexe. La lettre \mathcal{T} désigne un maillage simplicial du domaine Ω . Il permet le recouvrement de l'adhérence $\bar{\Omega}$ à l'aide des éléments tétraédriques $K \in \mathcal{T}^3$, de leurs facettes triangulaires $f \in \mathcal{T}^2$ qui composent leurs frontières, des arêtes $\alpha \in \mathcal{T}^1$ qui bordent les facettes triangulaires et des sommets $S \in \mathcal{T}^0$ qui sont points extrémaux des arêtes, des faces et des éléments du maillage.
- La trace du maillage \mathcal{T} sur la frontière $\partial\Omega$ définit un maillage $\mathcal{T}(\partial\Omega)$ de cette frontière, composé de sommets $S \in \mathcal{T}^0(\partial\Omega)$, d'arêtes de frontière $\alpha \in \mathcal{T}^1(\partial\Omega)$ et de facettes frontalières $f \in \mathcal{T}^2(\partial\Omega)$. Il est alors utile d'introduire les sommets, arêtes, faces du

maillage \mathcal{T} qui n'appartiennent pas à la frontière. on a posé

$$(1.1) \quad \mathcal{T}_0^j = \mathcal{T}^j \setminus \mathcal{T}^j(\partial\Omega), \quad j \in \{0, 1, 2\}.$$

on a mis $\#A$, en désignant par $\#A$ le nombre d'éléments d'un ensemble A

$$(1.2) \quad \#\mathcal{T}_0^0 - \#\mathcal{T}_0^1 + \#\mathcal{T}_0^2 - \#\mathcal{T}_0^3 = -1$$

- Les divers objets topologiques du maillage étant définis, on dispose "naturellement" de champs de vecteurs \mathcal{Q}_α définis relativement aux arêtes $\alpha \in \mathcal{T}^1$ et de champs \mathcal{E}_f associés aux faces $f \in \mathcal{T}^2$ du maillage.
- Si $\alpha = (A, B)$ est une arête du maillage, si $K = (A, B, C, D)$ un tétraèdre contenant l'arête α (voir la figure 1) et M un point de K , on a

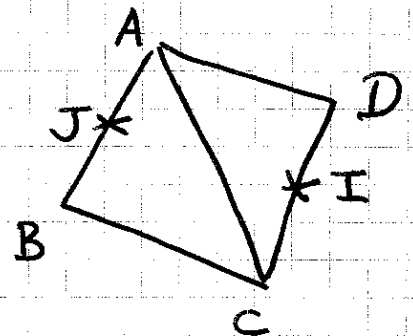


Figure 1 \mathcal{Q}_α

$$(1.3) \quad \mathcal{Q}_\alpha(M) = \frac{\vec{CD} \times \vec{IM}}{(\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{IJ})}, \quad M \in K$$

où I est le milieu de (C, D) et J celui de (A, B) . La fonction vectorielle \mathcal{Q}_α est nulle pour les éléments du maillage qui ne contiennent pas l'arête α et les circulations $\int_\beta \mathcal{Q}_\alpha \cdot \vec{\tau}_\beta \, ds$

de φ_α sur les arêtes $\beta \in \mathcal{B}'$ du maillage
s'en fait

$$(1.4) \quad \int_{\beta} \varphi_\alpha \cdot \tau_\beta \, ds = \delta_{\alpha, \beta} \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathcal{B}' .$$

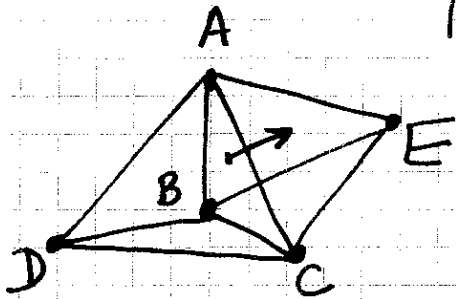


Figure 2 Support
de \mathbb{E}_f .

- Si $f = (A, B, C)$ est une face du maillage, elle est le bord de deux triangles $K = (A, B, C, D)$ et $L = (A, B, C, E)$ seulement, qui forment le cobord $\partial^c f$.

Si f est orientée de K vers L (comme sur la figure 2), on peut définir l'élément K comme "à gauche" de la face f et L comme étant "à droite" de cette même face. Le champ de vecteurs de base \mathbb{E}_f est nul pour les éléments du maillage autres que K et L et on a, en désignant par $|M|$ le volume d'un tétraèdre M :

$$(1.5) \quad \mathbb{E}_f(M) = \begin{cases} \frac{1}{3|K|} \vec{DM} & , \quad M \in K \\ -\frac{1}{3|L|} \vec{EM} & , \quad M \in L \end{cases} \quad , \quad \partial^c f = \{K, L\}$$

Les flux $\int_g \mathbb{E}_f \cdot n_g \, d\sigma$ sur les faces $g \in \mathcal{B}^2$ du maillage satisfont à la relation constitutive:

$$(1.6) \quad \int_g \mathbb{E}_f \cdot n_g \, d\sigma = \delta_{fg} \quad , \quad \forall g \in \mathcal{B}^2 .$$

- Dans ce paragraphe, on se donne une partie \mathcal{A} de l'ensemble \mathcal{O}^1 des arêtes et une partie \mathcal{F} de celui \mathcal{O}^2 des faces. En référence aux auteurs (Nédélec et Rao pour les éléments d'arêtes, Raviart, Thomas et Nédélec pour les éléments de faces), on pose

$$(1.7) \quad NR(\Omega, \mathcal{A}) = \langle \varphi_\alpha, \alpha \in \mathcal{A} \rangle, \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{O}^1$$

$$(1.8) \quad RTN(\Omega, \mathcal{F}) = \langle \xi_f, f \in \mathcal{F} \rangle, \quad \mathcal{F} \subset \mathcal{O}^2.$$

on dispose ainsi d'une double famille de champs de vecteurs. On a les propriétés fondamentales :

$$(1.9) \quad NR(\Omega, \mathcal{A}) \subset H(\text{rot}, \Omega)$$

$$(1.10) \quad RTN(\Omega, \mathcal{F}) \subset H(\text{div}, \Omega)$$

- Si on impose aux champs $\varphi \in NR$ de pouvoir être nuls aux bords, ceci signifie naturellement que la composante tangentielle (connée de $\frac{\Pi}{2}$, mais ne le répétons plus!) $\varphi \times n$ est nulle, soit les circulations $\int_\alpha \varphi \cdot \tau_\alpha ds$ nulles pour α arête du bord. on a donc

$$(1.11) \quad NR(\Omega, \mathcal{O}_0^1) \subset H(\text{rot}, \Omega) \cap \{ \varphi, \varphi \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

Dans le cas des champs de vecteurs divergents; si $u \in RTN$ doit avoir des flux nuls aux bords,

15-5

ie $\int_f u \cdot n_f ds = 0$ pour f facette du bord ($f \in \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$),
 il suffit de ne pas considérer ces facettes
 dans la base correspondante, et travailler avec
 \mathcal{C}_0^2 . On a donc

(1.12) $RTN(\Omega, \mathcal{C}_0^2) \subset H(\text{div}, \Omega) \cap \{v, v \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

• on s'intéresse aux champs de vecteurs $u \in RTN$
 (ils définis par leurs flux sur les facettes du mailla-
 ge) nuls au bord (dans le cadre de cet exposé
 incompressible) et à divergence nulle (solénoïdaux) :

(1.13) $RTN_0(\Omega, \mathcal{C}_0^2) = \{v = \sum_{f \in \mathcal{C}_0^2} v_f F_f, \text{div } v = 0\}$.

Nous avons vu lors de la leçon précédente que

(1.14) $\dim RTN_0(\Omega, \mathcal{C}_0^2) = \# \mathcal{C}_0^2 - \# \mathcal{C}^3 + 1$.

Nous allons construire une base de cet espace
 à l'aide d'un peu de théorie des graphes, sui-
 vant en cela des travaux initiés par M. Anaya,
 JM Dauray, FX Roue et l'auteur dans les
 années 80-90. (F. Hecht)

② Base des champs solénoïdaux.

- Nous avons vu lors de la leçon précédente que le rotationnel d'un champ ψ "unilatéral" ($\psi \in NR(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$) appartient à l'espace des champs de vecteurs solénoïdaux

$$(2.1) \quad \text{rot}[NR(\Omega, \mathcal{B}_0^2)] \subset RTN_0(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$$

Mais on a

$$(2.2) \quad \dim NR(\Omega, \mathcal{B}_0^1) = \#\mathcal{B}_0^1$$

ce qui montre que, modulo une surjectivité qui n'est pas établie, le rotationnel a un noyau de dimension

$$\begin{aligned} \dim RTN_0(\Omega, \mathcal{B}_0^2) - \dim NR(\Omega, \mathcal{B}_0^1) &= \\ &= \#\mathcal{B}_0^2 - \#\mathcal{B}_0^3 + 1 - \#\mathcal{B}_0^1 \quad [\text{cf (1.14) et (2.1)}] \\ &= \#\mathcal{B}_0^0 \quad [\text{cf (1.2)}]. \end{aligned}$$

Nous allons revenir à l'espace $NR(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$ avant d'arriver que le maillage compte de sommets intérieurs pour construire la jaige axiale [not transmis par J. Guillemin vers 1986; je manque de références...] et écrire la base de $RTN_0(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$ sous la forme de rotationnels. Nous allons montrer

que $RTN_0(\Omega, \mathcal{T}_0^2)$ est engendré par des champs φ_α pour $\alpha \in \mathcal{M}_0$, \mathcal{M}_0 ensemble d'arêtes internes dans \mathcal{T}_0^1 qui reste à préciser :

$$(2.3) \quad RTN_0(\Omega, \mathcal{T}_0^2) = \langle \text{rot} \varphi_\alpha, \alpha \in \mathcal{M}_0 \rangle, \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{T}_0^1$$

Ainsi tout champ $u \in RTN$ à divergence nulle et nul au bord peut s'écrire sous la forme

$$(2.4) \quad u = \text{rot} \varphi, \quad \varphi = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_0} \varphi_\alpha \varphi_\alpha,$$

sans oublier les hypothèses (les plus simples) faites pour l'ouvert Ω .

- On introduit le graphe G induit par les arêtes du maillage dans l'ensemble \mathcal{T}_0^0 des sommets intérieurs :

$$(2.5) \quad G = \{ \alpha = (A, B) \in \mathcal{T}_0^1, A \in \mathcal{T}_0^0, B \in \mathcal{T}_0^0 \}.$$

Le graphe G est défini par les arêtes qui joignent deux sommets intérieurs au maillage. On se donne de façon arbitraire une arête maximale τ_0 au sein du graphe G ; on a bien entendu (voir la leçon précédente)

$$(2.6) \quad \# \tau_0 = \# \mathcal{T}_0^0 - 1.$$

De plus, τ_0 n'a pas de cycle et si on ajoute à τ_0 une arête α de G , on obtient un cycle.

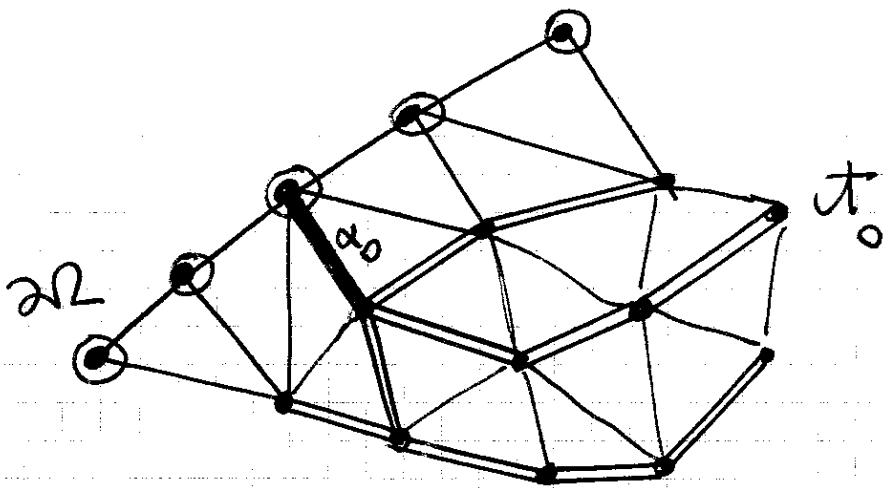


Figure 3 Représentation symbolique des sommets de la frontière (point entouré d'un cercle), des sommets intérieurs \mathcal{T}_0 (point simple), des arêtes du maillage (segments de droite liant les sommets). L'arête α_0 (trait fort) relie un sommet de la frontière et un sommet intérieur alors que l'arbre maximal τ_0 (trait double) permet de visiter tous les sommets intérieurs sans faire de cycle. Les arêtes utiles pour la famille \mathcal{N}_0 sont celles en trait simple qui ne sont pas sur le bord.

-
- on se donne également une arête α_0 qui relie un sommet de la frontière et un sommet intérieur :

$$(2.7) \quad \alpha_0 = (A, B), \quad A \in \mathcal{T}_0(\mathcal{R}), \quad B \in \mathcal{T}_0.$$

Les arêtes α_0 et t_0 une fois fixés, on les enlève de l'ensemble des degrés de liberté qui vont engendrer les potentiels vecteurs. On introduit l'ensemble \mathcal{M}_0 via la relation

$$(2.8) \quad \mathcal{M}_0 = \mathcal{E}_0^1 \setminus (\{\alpha_0\} \cup t_0).$$

on a donc

$$(2.9) \quad \# \mathcal{M}_0 = \# \mathcal{E}_0^1 - \# \mathcal{E}_0^0$$

- on définit l'espace des potentiels vecteurs par

$$(2.10) \quad NR(\Omega, \mathcal{M}_0) = \sum_{\alpha \in \mathcal{E}_0^1} \psi_\alpha \varphi_\alpha, \quad \psi_{\alpha_0} = 0, \quad \psi_\beta = 0 \text{ si } \beta \in t_0$$

on remarque que

$$(2.11) \quad \dim NR(\Omega, \mathcal{M}_0) = \dim RTN_0(\Omega, \mathcal{E}_0^2)$$

au vu de (1.14) et (1.2). on a ensuite la propriété fondamentale

Prop (2) Le rotationnel est injectif de $NR(\Omega, \mathcal{M}_0)$ dans $RTN_0(\Omega, \mathcal{E}_0^2)$:

$$(2.12) \quad \psi \in NR(\Omega, \mathcal{M}_0), \quad \text{rot } \psi = 0 \Rightarrow \psi = 0.$$

Preuve de la proposition (1)

15-10

- on montre d'abord que si l'on écrit $\psi \in NR(\Omega, \mathcal{M}_0)$ sous la forme

$$(2.13) \quad \psi = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}_0} \psi_\alpha \varphi_\alpha,$$

alors le nombre $\psi_\alpha = \int_\alpha \psi \cdot \tau_\alpha ds$ est un lorsque α est une arête

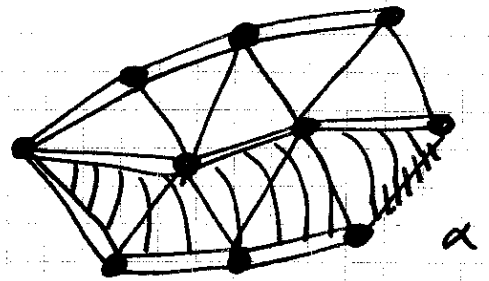


Figure 4 Surface Σ_α

liant deux sommets intérieurs au maillage. Considérons une arête α qui n'appartient pas à l'autre τ_0 (on a bien entendu $\psi_\beta = 0$ lorsque $\beta \in \tau_0$ par construction même de l'espace $NR(\Omega, \mathcal{M}_0)$). Alors $\{\alpha\} \cup \tau_0$ contient un cycle Γ_α et, comme Σ est simplement connexe, ce cycle est le bord d'une surface discrète Σ_α (cf figure 4) : $\Gamma_\alpha = \partial \Sigma_\alpha$. on peut donc intégrer le flux (nul!) de rot ψ sur la surface Σ_α et on a le calcul classique:

$$0 = \int_{\Sigma_\alpha} \text{rot} \psi \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial \Sigma_\alpha} \psi \cdot \tau \, ds = \sum_{\beta \in \Gamma_\alpha} \int_\beta \psi \cdot \tau \, ds$$

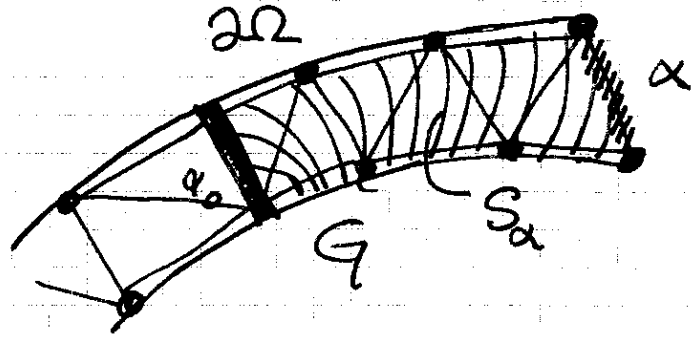
$$= \sum_{\beta \in \Gamma_\alpha} \psi_\beta = \psi_\alpha + \sum_{\beta \in \Gamma_\alpha \cap \tau_0} \psi_\beta = \psi_\alpha$$

car $\psi_\beta = 0$ pour une arête $\beta \in \tau_0$.

de calcul précédent prouve donc cette propriété' 15-11

$$(2.14) \quad \psi_\alpha = 0, \quad \alpha \in G.$$

- Pour établir la propriété, il faut et il suffit montrer que ψ_α est nul pour une arête α qui relie le bord $\partial\Omega$ à un sommet intérieur. Mais on a (2.14) et



Figures Les arêtes β entières double sont tels que $\psi_\beta = 0$.

$$(2.15) \quad \psi_\beta = 0, \quad \beta \in \mathcal{B}'(\partial\Omega).$$

étant donné une arête α qui relie le bord $\partial\Omega$ à un sommet intérieur (Figures 5), on peut construire une surface discrète S_α composée d'arêtes de $\mathcal{B}'(\partial\Omega)$ (sur le bord), d'arêtes intérieures, de l'arête α_0 et de l'arête α elle-même. On a alors un calcul analogue à celui fait au paragraphe précédent:

$$0 = \int_{S_\alpha} \text{rot} \psi \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial S_\alpha} \psi \cdot \tau \, ds = \sum_{\beta \in \mathcal{B}'(\partial\Omega) \cap \partial S_\alpha} \psi_\beta + \psi_{\alpha_0} +$$

$$+ \psi_\alpha + \sum_{\beta \in \mathcal{B}_0 \cap \partial S_\alpha} \psi_\beta = \psi_\alpha$$

où $\psi_\beta = 0$ pour toutes les autres arêtes! D'où la propriété. La proposition est établie. \square

(Prop) (2) Toute fonction ^{discrete} en solénoïdale de flux nul au bord ($u \in RTN_0(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$) s'écrit de façon unique sous la forme

$$(2.16) \quad u = \text{rot } \psi, \quad \psi \in NR(\Omega, \mathcal{M}_0)$$

La famille $\{ \text{rot } \psi_\alpha, \alpha \in \mathcal{M}_0 \}$ est une base de $RTN_0(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$.

Preuve de la proposition (2)

- Le rotationnel est injectif de $NR(\Omega, \mathcal{M}_0)$ dans $RTN_0(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$. De plus (cf (2.11)), ces deux espaces ont la même dimension. Donc il est bijectif et (2.16) a lieu. Compte tenu de l'injectivité du rotationnel, $(\text{rot } \psi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{M}_0}$ est une famille libre qui, de plus, engendre $RTN_0(\Omega, \mathcal{B}_0^2)$. D'où la seconde propriété et le résultat. \square
- En conclusion, pour construire une base de champs solénoïdaux de flux nul au bord, on considère les "trouillons d'arêtes" $\text{rot } \psi_\alpha$ pour α arête non incluse dans le bord différente d'une arête de fixé qui relie le bord à l'intérieur de Ω et hors d'un cube maximal dans l'ensemble des arêtes liant deux sommets intérieurs. Construction qui demande de la maîtrise d'algorithmes discrets. Base explicite.

F. Dubois, Versailles, 30/1/06.