le cnam

Modélisation Numérique pour le Génie des Procédés

Paris, automne 2015

Cours 01

Schéma d'Euler explicite

François Dubois

CNAM Paris
Génie des Procédés CGP213
Modélisation Numérique

5 avril 2013

I Schéma d'Euler explicite

1) Système dynamique et formule analytique

Nous connaissons la fonction exponentielle décroissante

(1) $u(t) = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Elle tend vers zéro si t tend vers $+$ infini, elle reste positive, elle vaut 1 si $t = 0$:

(2) $u(0) = 1$,

et sa dérivée $\frac{du}{dt}$ est l'opposée de u. En effet, $\frac{du}{dt} = -e^{-t} = -u(t)$. Donc

(3) $\frac{du}{dt} + u(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

- De la "formule analytique" (1), nous avons déduit que la fonction $u(\bullet)$ est solution du "système dynamique" (2)(3) composé de la condition initiale (2) (on dit ce que vaut $u(\cdot)$ à $t=0$) et de l'équation (différentielle) (3) qui pilote l'évolution (la dérivée en temps) en fonction de l'état (la fonction $u(t)$ elle-même). Il est remarquable que la réciproque est vraie.

Prop <u>Unicité de la solution du système dynamique</u>

Si $u(t)$ est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait à (2)(3), alors $u(t)$ est unique et c'est la fonction exponentielle proposée à la relation (1).

<u>Preuve</u> Considérons $u(\cdot)$ solution de (2)(3) et formons la nouvelle fonction $v(t) = u(t)\,e^{t}$.

A $t=0$, $v(0) = u(0)\,e^{0} = 1 \times 1 = 1$.

De plus, à l'aide de la règle de Leibniz de dérivation d'un produit,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}\,e^{t} + u\,\frac{d}{dt}\left(e^{t}\right)$$

$$= -\left(u(t)\right)e^{t} + u\,e^{t} \quad \text{car (3) et } \frac{d}{dt}e^{t} = e^{t}$$

$$= 0.$$

La fonction $v(\cdot)$, de dérivée nulle, est donc constante et comme $v(0) = 1$, cette constante vaut 1 : $u(t)\,e^{t} = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. La relation (1) s'en déduit.

$\square$

Le calcul approché de la fonction exponentielle $u(t)$ proposé en (1) est très naturel à partir du système dynamique (2)(3). Nous allons nous en convaincre dans la suite.

2) Approximation par différences finies.

Pour approcher le système (2)(3), on se donne un pas de temps $\Delta t > 0$ et on se contente de chercher une approximation u^k de $u(k\Delta t)$ (k entier ≥ 0) pour les multiples du pas de temps. On remarque d'abord que pour $t=0$ (c'est à dire $k=0$), on a une approximation "exacte" proposée par la condition initiale (2) :

$$(4) \qquad u^0 = u(0) \qquad \text{à } t=0.$$

- On se propose de déterminer u^1, valeur approchée de $u(\Delta t)$. On écrit le "théorème fondamental de l'analyse" :

$$u(\Delta t) = u(0) + \int_0^{\Delta t} \frac{du}{dt}\, dt.$$

Puis on remplace $\frac{du}{dt}$ dans l'intégrale par $-u(t)$, en prenant en compte l'équation différentielle (3) :

$$u(\Delta t) = u(0) - \int_0^{\Delta t} u(t)\, dt.$$

- On peut approcher l'intégrale $\int_0^{\Delta t} u(t)\,dt$ par la méthode des rectangles. On a (avec la variante dite des "rectangles à gauche") :

$$(5) \qquad \int_0^{\Delta t} u(t)\,dt \simeq \Delta t \; u(0) .$$

On en déduit

$$u(\Delta t) \simeq u(0) - \Delta t \; u(0)$$

qui explicite une valeur approchée u^1 qui se calcule par la relation

$$(6) \qquad u^1 = u^0 - \Delta t \; u^0 .$$

On vient de construire le premier pas du schéma d'Euler explicite.

- Si on suppose connue une approximation u^k de $u(k\Delta t)$, on construit l'approximation u^{k+1} à l'instant suivant avec les mêmes idées. On a d'abord

$$u((k+1)\Delta t) = u(k\Delta t) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \frac{du}{dt}\,dt$$

$$= u(k\Delta t) - \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} u(t)\,dt$$

On remplace ensuite l'intégrale par une valeur approchée à l'aide de la métho de des rectangles :

$$(7) \quad \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} u(t)\,dt \simeq \Delta t \; u(k\Delta t) \simeq \Delta t \, u^k .$$

on reporte cette valeur dans le calcul précédent, en remplaçant partout les valeurs exactes par leurs approximations :

$$u((k+1)\Delta t) \simeq u^k - \Delta t \, u^k \equiv u^{k+1} .$$

La relation

$$(8) \quad u^{k+1} = u^k - \Delta t \, u^k , \quad k \text{ entier} \geq 0$$

définit le schéma d'<u>Euler explicite</u> pour l'équation différentielle (3), paramétré par le pas de temps Δt.