le cnam

Modélisation Numérique pour le Génie des Procédés

Paris, automne 2015

Cours 05

Introduction à l'advection - diffusion

François Dubois

CNAM Paris
Génie des Procédés
Modélisation Numérique. 3 mai 2013

(V) Introduction à l'advection-diffusion.

1) Equation d'advection-diffusion.

Ce modèle mathématique généralise l'équation de la chaleur. On se donne d'abord une diffusivité (ou une viscosité) $\mu > 0$ et une vitesse a. On cherche $u(x,t) \in \mathbb{R}$ solution de la dynamique

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 .$$

On a vu aux leçons III et IV que le cas de l'équation de la chaleur correspond à $a = 0$.

- Si $a \neq 0$ et $\mu = 0$ au contraire, le modèle (1) se réduit à l'équation d'advection

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ,$$

qui exprime le transport du scalaire u avec la vitesse a.

En effet, si on adjoint à (2) [ou (1)] la condition initiale

(3) $\quad u(x,0) = u_0(x)$

où $u_0(\bullet)$ est une fonction donnée arbitraire, on peut montrer (à l'aide de la méthode des caractéristiques, qui constitue un prolongement naturel de ces leçons !) que la solution de (2)(3) s'écrit

(4) $\quad u(x,t) = u_0(x-at)$.

Le lecteur vérifiera simplement que si on injecte (4) dans (2) et (3), on satisfait bien à l'équation d'advection et à la condition initiale.

- Dans la suite de cette leçon, nous limitons le domaine de x : $0 \leq x \leq L$ (la longueur $L>0$ du domaine est donnée) et nous introduisons une condition limite (dite de Dirichlet) à chaque extrémité :

(5) $\quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = V, \quad t>0,$

avec $V \neq 0$ pour fixer les idées.

2) Discrétisation par différences finies.

On se donne une grille régulière en espace, liée à un intervalle Δx de sorte que

(6) $\quad \Delta x = L / J, \quad J$ entier ≥ 1.

On se donne aussi un pas de temps $\Delta t > 0$ qui permet de former, à l'aide de $\mu > 0$, le nombre sans dimension

(7) $\quad \displaystyle \xi = \frac{\mu \, \Delta t}{\Delta x^2} > 0 .$

- Nous avons vu lors des leçons précédentes que pour approcher l'équation d'évolution telle que (1), on cherche une famille discrète de réels u_j^n

(8) $\quad u_j^n \simeq u(j\Delta x, n\Delta t), \; 0 \leq j \leq J, \; n \geq 0.$

On approche les opérateurs présents dans l'équation (1)

(9) $\quad \displaystyle \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n \simeq \frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right)$

(10) $\quad \displaystyle \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \simeq \frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right) .$

Le schéma (9) est décentré en temps, alors que (10) est centré en espace. Pour la dérivée première, on choisit aussi un schéma centré :

$$(11) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \simeq \frac{1}{2\Delta x}\left(u_{j+1} - u_{j-1}\right).$$

On constate que pour approcher la dérivée au point $x_j = j\Delta x$, on n'a pas besoin de la valeur u_j elle-même si on utilise le schéma centré (11). C'est une curiosité qui induit des aspects négatifs qui ne seront pas développés ici.

- on adopte aussi un schéma d'Euler implicite en temps, c'est à dire qu'on associe à (8)(9) une approximation (10)(11) évaluée à l'instant $(n+1)\Delta t$:

$$(12) \qquad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^{n+1} - \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^{n+1} = 0 .$$

Quand on injecte (10) et (11) dans (12), on obtient le schéma centré en espace et implicite en temps pour l'équation d'advection - diffusion :

$$(13) \qquad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}\right) - \frac{\mu}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}\right) = 0$$

- on multiplie (13) par Δt, on introduit ρ grâce à (7) et un nouveau paramètre β :

(14) $$\beta = \frac{a\,\Delta t}{2\Delta x} .$$

on peut alors réécrire (13) en mettant (a priori) en évidence ce qui est connu (u_j^n) et ce qui est inconnu (les u_ℓ^{n+1}) :

(15) $$-(\beta+\rho)\,u_{j-1}^{n+1} + (1+2\rho)\,u_j^{n+1} + (\beta-\rho)\,u_{j+1}^{n+1} = u_j^n , \quad 1 \leq j \leq J-1$$

3) Résolution du système linéaire

on a écrit (15) pour $1 \leq j \leq J-1$ car on a besoin des points voisins de l'indice j pour former le membre de gauche. On n'oublie pas que les conditions aux limites (5) se traduisent en $j=0$ et $j=J$ par les conditions

(16) $$u_0^{n+1} = 0 , \quad u_J^{n+1} = V , \quad n \text{ entier} \geq 0 .$$

- on réécrit (15) pour les différentes valeurs de j, sachant que pour l'ensemble des valeurs u_ℓ^{n+1}, seules $u_1^{n+1}, \ldots, u_{J-1}^{n+1}$

sont véritablement inconnues. En effet u_0^{n+1}, qui apparaît dans (15) pour $j=1$, est connu (et vaut 0 au vu de (16)). On en déduit

$$(17)\quad (1+2\rho)\,u_1^{n+1} + (\beta-\rho)\,u_2^{n+1} = u_1^n .$$

$$(18)\quad -(\beta+\rho)\,u_{j-1}^{n+1} + (1+2\rho)\,u_j^{n+1} + (\beta-\rho)\,u_{j+1}^{n+1} = u_j^n, \quad 2 \leq j \leq J-2$$

$$(19)\quad -(\beta+\rho)\,u_{J-2}^{n+1} + (1+2\rho)\,u_{J-1}^{n+1} = u_{J-1}^n - (\beta-\rho)V .$$

En effet, pour $j=J-1$ traité par la relation (19), u_J^{n+1} apparaît (c'est le troisième terme du membre de gauche de (15)); il est connu compte tenu de la condition limite (16). On le passe donc dans le membre de droite, ce qui justifie la relation (19).

- Le système (17)(18)(19) est composé de $1+(J-2-1)+1 = J-1$ équations ; il comporte $(J-1)$ inconnues $u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{J-1}^{n+1}$. C'est un système linéaire qu'on peut écrire

$$(20)\quad A \cdot X = b ,$$

avec $X_j = u_j^{n+1}$, $b_j = u_j^n$ pour $j \neq J-1$

et $b_{J-1} = u_{J-1}^n - (\beta - \rho) V$. La matrice A
est carrée d'ordre $(J-1)$. Elle est tridiagonale mais n'est pas symétrique si $\beta \neq 0$ (cas déjà étudié pour l'équation de la chaleur avec $\beta = 0$) :

$$
(21)\quad A = \begin{bmatrix}
1+2\rho & \beta-\rho & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-\beta-\rho & 1+2\rho & \ddots & \ddots & & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & -\beta-\rho & 1+2\rho & \beta-\rho & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & -\beta-\rho & 1+2\rho & \beta-\rho \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -\beta-\rho & 1+2\rho
\end{bmatrix}
$$

La résolution du système linéaire (20) n'offre pas de difficulté. Dans le cadre de ces leçons, on se contente d'utiliser l'opérateur "antislash" du langage octave : $X = A \backslash b$.

- On note que la matrice A dépend de J (elle est d'ordre $(J-1)$) de ρ et de β.

4) Problème stationnaire.

On remarque dans ce paragraphe que si

on ajoute la contrainte

(22) $$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

on peut résoudre de façon analytique le modèle (1)(5). En effet, (1)(22) s'écrit aussi

(23) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(au - \mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

car a et μ sont des constantes. On en déduit que $au - \mu \frac{\partial u}{\partial x}$ est une constante. Après intégration, il existe deux constantes p et q de sorte que (avec la notation $u \leftrightarrow u_\infty$) :

(24) $$u_\infty(x) = p \exp\left(\frac{ax}{\mu}\right) + q, \quad 0 \leq x \leq L.$$

on fixe les constantes p et q à l'aide de (5). Il vient facilement

(25) $$u_\infty(x) = V \, \frac{\exp\left(\frac{ax}{\mu}\right) - 1}{\exp\left(\frac{aL}{\mu}\right) - 1}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

- on introduit un nouveau nombre sans dimension, le nombre de Reynolds, qui est complètement lié à la physique de (1) et à la taille du domaine :

(26) $$Re = \frac{aL}{\mu}.$$

En général, $Re \gg 1$ et on écrit (25) sous la forme

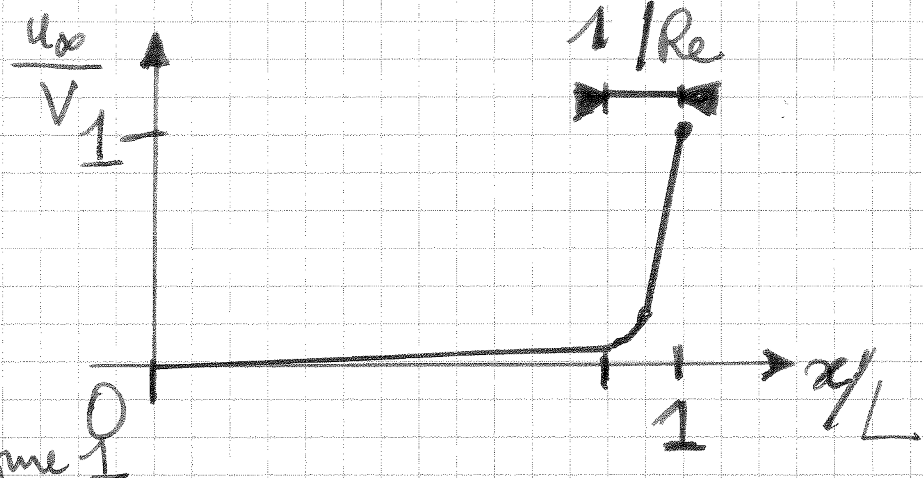
$$u_\infty(x) = V \frac{\exp\left[Re\left(\frac{x}{L}-1\right)\right] - \exp(-Re)}{1 - \exp(-Re)} \quad (27)$$

5) Notion de couche limite.

Malgré sa simplicité algébrique, la relation (27) n'est pas si simple à utiliser si $Re \gg 1$. On peut bien sûr négliger $\exp(-Re)$ devant 1 au dénominateur. Au numérateur, on a essentiellement zéro, <u>sauf</u> si $Re\left(\frac{x}{L}-1\right)$ est "petit", petit devant Re qui est très grand, c'est à dire de l'ordre de 1 typiquement. On a donc $u_\infty(\cdot)$ notablement non nulle pour

$$|x-L| \lesssim \frac{L}{Re}, \quad (28)$$

ainsi qu'illustré Figure 1.



<u>Figure 1</u>

Une couche limite d'épaisseur $\frac{L}{Re}$
apparaît dans la solution stationnaire $u_\infty(\bullet)$. Elle a une caractéristique physique directement reliée au nombre sans dimension Re.

- Attention !

Les paramètres Re, σ et β ne sont pas indépendants ! Compte tenu de (7) et (14), on a

$$\frac{\beta}{\sigma} = \frac{a\Delta t}{2\Delta x}\,\frac{\Delta x^2}{\mu\Delta t} = \frac{a\,\Delta x}{2\mu} = \frac{aL}{2\mu}\,\frac{1}{J}$$

compte tenu de (6). On déduit alors de (26)

$$(29) \qquad \frac{\beta}{\sigma} = \frac{1}{2}\,\frac{Re}{J}.$$

Si on veut calculer la solution de l'équation d'advection diffusion paramétrée par un nombre de Reynolds Re sur une grille comportant J mailles, on fixe le pas de temps Δt grâce à la donnée de σ (cf (7)). Alors le paramètre β est imposé et doit être calculé à l'aide de (29).

6) Stabilité.

Comme pour l'équation de la chaleur,

on peut faire une analyse de Von Neumann du schéma (15) en supposant $j \in \mathbb{Z}$ et $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ vérifiant une condition d'onde qu'on peut écrire

$$(30) \qquad u_{j+1} = e^{i\xi}\, u_j \,, \quad u_{j-1} = e^{-i\xi}\, u_j \,, \quad j \in \mathbb{Z} .$$

Le nombre d'onde ξ est relié au vecteur d'onde k par la condition

$$(31) \qquad \xi = k\Delta x \,;$$

il est arbitraire car le vecteur d'onde l'est aussi a priori.

- Si on injecte la relation (30) dans (15), il vient

$$\left[-(\beta+\varsigma)e^{-i\xi} + (1+2\varsigma) + (\beta-\varsigma)e^{i\xi}\right] u_j^{n+1} = u_j^{n}$$

Donc u_j^{n+1} est le produit de u_j^{n} par le facteur d'amplification $g(\xi;\beta,\varsigma)$:

$$(32) \qquad u_j^{n+1} = g(\xi;\beta,\varsigma)\, u_j^{n} \,, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

on a, compte tenu du calcul précédent :

$$\frac{1}{g} = 2i\beta\sin\xi + 1 + 2\,\varsigma(1-\cos\xi)$$

$$(33) \qquad \frac{1}{g} = 1 + 4\varsigma\sin^2\frac{\xi}{2} + 2i\beta\sin\xi .$$

- La condition de stabilité exprime que pour toute onde, la suite géométrique définie par (32) reste bornée, c'est à dire

$$(34) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}, \; |g(\xi; \beta, 5)| \leqslant 1 .$$

Compte tenu de (33), on a

$$\frac{1}{|g|^2} = \left(1 + 4 5 \sin^2 \frac{\xi}{2}\right)^2 + 4\beta^2 \sin^2 \xi \geqslant 1, \forall \xi .$$

Donc la condition (34) est satisfaite pour <u>tout</u> couple $(\beta, 5)$; le schéma (15) est <u>inconditionnellement stable</u>.

Dubois 4 mai 2013.