EMMN (1)

Schéma d'Euler explicite

- ## Modèle dynamique fondamental

Défini à l'aide du paramètre $\lambda > 0$, il comporte d'une part l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{du}{dt} + \lambda u = 0, \quad t > 0$$

et d'autre part la condition initiale

$$(2) \quad u(0) = u_0$$

où u_0 est un nombre réel donné. On sait que le système (1)(2) a une solution unique $u(t)$ qu'on peut exprimer à l'aide de la fonction exponentielle :

$$(3) \quad u(t) = \exp(-\lambda t)\, u_0, \quad t \geq 0.$$

L'emploi d'un modèle numérique permet d'approcher $u(t)$ sans avoir recours à l'exponentielle.

- ## Discrétisation.

Alors qu'une solution "analytique" telle que (3) permet de calculer $u(t)$ pour tout instant $t \geq 0$, une méthode numérique impose d'introduire d'abord un <u>pas de temps</u> $\Delta t > 0$ pour cher-

cher ensuite une approximation u^k de $u(k\Delta t)$ pour les valeurs entières de k :

(4) $u^k \simeq u(k\Delta t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

La condition initiale (2) nous incite à poser

(5) $u^0 = u_0$

mais comment passer à $u^1 \simeq u(\Delta t)$? on intègre simplement la relation (1) entre les instants 0 et Δt :

$$u(\Delta t) = u(0) + \int_0^{\Delta t} \frac{du}{dt}\, dt$$

$$= u(0) - \lambda \int_0^{\Delta t} u(t)\, dt.$$

on approche ensuite l'intégrale $\int_0^{\Delta t} u(t)\,dt$ par une formule du rectangle :

(6) $\int_0^{\Delta t} u(t)\, dt \simeq \Delta t \quad u(0)$

ce qui conduit à la relation approchée

(7) $u(\Delta t) \simeq u(0) - \lambda \Delta t\, u(0)$

* On définit alors le schéma numérique en remplaçant $u(\Delta t)$ et $u(0)$ par leurs valeurs approchées u^1 et u^0 et en changeant le symbole "$\simeq$" par une égalité :

$$(8) \quad u^1 = u^0 + (-\lambda \Delta t)\, u^0.$$

- <u>algorithme</u>

Dans le cas général d'un entier k quelconque, on suppose $u^k \simeq u(k\Delta t)$ connu. Alors une relation permettant de calculer u^{k+1} à l'étape suivante s'obtient par le même argument qu'au paragraphe précédent:

$$u((k+1)\Delta t) = u(k\Delta t) - \lambda \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} u(t)\, dt$$

$$\simeq u(k\Delta t) - \lambda \Delta t \;\; u(k\Delta t)$$

on remplace ensuite $u(k\Delta t)$ et $u((k+1)\Delta t)$ par leurs approximations u^k et u^{k+1}, en changeant le symbole "$\simeq$" pour un "$=$", ce qui définit l'algorithme d'Euler explicite (ou schéma d'Euler explicite):

$$(9) \quad u^{k+1} = u^k - \lambda \Delta t\, u^k.$$

- <u>Stabilité</u>

Compte tenu de la simplicité de la relation (9), on pose $\xi = \lambda \Delta t$. On a alors

$$(10) \quad \frac{u^{k+1}}{u^k} = 1 - \xi, \quad \xi = \lambda \Delta t.$$

Si on revient à la solution (3) "exacte" du modèle (1)(2), on remarque que le rapport $u((k+1)\Delta t) / u(k\Delta t)$ s'exprime simplement à l'aide de ξ :

$$(11) \quad \frac{u((k+1)\Delta t)}{u(k\Delta t)} = e^{-\xi} .$$

* En particulier, le rapport $\frac{u((k+1)\Delta t)}{u(k\Delta t)}$ pour deux instants successifs reste positif.
Cette propriété est en défaut pour le schéma d'Euler (9) dès que $\xi \geq 1$. Il est donc prudent de se limiter aux valeurs $\xi < 1$, c'est à dire

$$(12) \qquad 0 < \lambda \Delta t < 1$$

La condition $\lambda \Delta t < 1$ est une condition de stabilité. Si elle n'est pas satisfaite, le schéma d'Euler (9) conduit à des aberrations numériques.

- Constante de temps.

On peut interpréter la condition (12) en termes plus proches de la dynamique initiale (3). En effet, l'évolution (3) est notable pour des temps de l'ordre de $1/\lambda$, qui est la constante de temps T associée à la dynamique (1)(2) :

(13) $T = 1/\lambda$.

La condition de stabilité signifie simplement

(14) $0 < \Delta t < T$,

c'est à dire que le schéma d'Euler ne peut pas utiliser un pas de temps supérieur à la constante de temps typique du phénomène étudié. Si un processus se déroule à une échelle temporelle typique de 1 seconde, il est exclu avec cette approche de choisir Δt supérieur à 1 s. De plus, le schéma est d'autant plus précis que le pas de temps Δt est choisi petit.

Dubois.