EMMN (2)

Schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson.

• Modèle dynamique.

Nous nous donnons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ régulière "quelconque", et nous cherchons $u(t)$, solution du modèle composé de l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{du}{dt} = f(u(t)), \quad t > 0$$

et de la condition initiale

$$(2) \quad u(0) = u_0$$

* Bien entendu, si

$$(3) \quad f(u) = -\lambda u,$$

on peut calculer $u(t)$ exactement. Mais dans le cas général, on ne dispose pas de formule analytique. Les résultats mathématiques rigoureux sont même d'un énoncé modeste : on sait simplement que pour f assez régulière et $t > 0$ choisi "assez petit", on dispose d'une solution $u(t)$ et d'une seule pour le système (1)(2).

on ne s'attardera pas ici sur le fait que le système (1)(2) peut exploser : avec des données aussi simples que $f(u) = 1+u^2$ et $u_0 = 0$, la solution $u(t) = \operatorname{tg} t$ existe et est unique pour $t < \pi/2$ seulement.

- Schéma d'Euler explicite.

Le principe de construction d'une approximation de (1)(2) par différences finies suit ce qui a été proposé au chapitre précédent. On se donne $\Delta t > 0$, $k \in \mathbb{N}$, et on suppose connue une approximation u^k de $u(k\Delta t)$. En intégrant (1) entre $k\Delta t$ et $(k+1)\Delta t$, on a facilement

$$u((k+1)\Delta t) = u(k\Delta t) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(u(t))\, dt .$$

* on doit approcher une intégrale de la forme $\int_a^b \varphi(t)\, dt$, avec $a = k\Delta t$, $b = (k+1)\Delta t$, $\varphi(t) = f(u(t))$. On dispose d'au moins trois relations pour un calcul approché : les formules de rectangles et la formule des trapèzes.

La formule des rectangles "à gauche" s'écrit

$$(4) \qquad \int_a^b \varphi(t)\, dt \simeq (b-a)\, \varphi(a) ,$$

celle des rectangles "à droite" prend la forme

(5) $\int_a^b \varphi(t)\,dt \simeq (b-a)\varphi(b)$.

La formule des trapèzes consiste à remplacer φ par une fonction affine $\psi(t)$ égale à φ en $t=a$ et $t=b$, c'est à dire

(6) $\psi(t) = \varphi(a) + \dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}(t-a)$

et à calculer $\int_a^b \psi(t)\,dt$ au lieu de $\int_a^b \varphi(t)\,dt$:

(7) $\int_a^b \varphi(t)\,dt \simeq (b-a)\dfrac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$.

* Le schéma d'Euler explicite utilise la relation (4), avec $a = k\Delta t$, $b=(k+1)\Delta t$, $\varphi(t) = f(u(t))$:

(8) $\displaystyle\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(u(t))\,dt \simeq \Delta t\, f(u(k\Delta t))$.

La relation approchée

(9) $u((k+1)\Delta t) \simeq u(k\Delta t) + \Delta t\, f(u(k\Delta t))$

définit le schéma d'Euler explicite en remplaçant $u(k\Delta t)$ par u^k, $u((k+1)\Delta t)$ par u^{k+1} et "$\simeq$" par une égalité :

(10) $u^{k+1} = u^k + \Delta t\, f(u^k)$.

• Schéma d'Euler implicite

On utilise la relation (5) pour approcher l'intégrale $\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(u(t))\,dt$. D'où

(11) $u((k+1)\Delta t) \simeq u(k\Delta t) + \Delta t\, f(u((k+1)\Delta t))$

et le schéma d'Euler implicite en passant aux valeurs approchées :

(12) $u^{k+1} = u^k + \Delta t\, f(u^{k+1})$.

Cette relation est a priori moins satisfaisante que (10) qui est une simple "formule" pour calculer u^{k+1}. Ici, u^{k+1} s'exprime en fonction de u^k (supposé connu) et de $f(u^{k+1})$, qui est inconnu ! La relation (12) est en fait une équation d'inconnue u^{k+1} qu'on écrit sous la forme

(13) $u^{k+1} - \Delta t\, f(u^{k+1}) = u^k$.

* Si f est trop compliquée, la résolution du schéma d'Euler implicite (13) peut être un problème en soi. Nous y reviendrons.

- Schéma de Crank-Nicolson.

On utilise la formule des trapèzes (7) pour approcher l'intégrale $\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(u(t))\,dt$. D'où

$$(14)\quad u((k+1)\Delta t) \simeq u(k\Delta t) + \frac{\Delta t}{2}\Big(f(u(k\Delta t)) + f(u((k+1)\Delta t))\Big)$$

Le schéma de Crank-Nicolson s'obtient en remplaçant $u(k\Delta t)$ et $u((k+1)\Delta t)$ par leurs valeurs approchées, au sein de la relation (14) :

$$(15)\quad u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{2}\left(f(u^k) + f(u^{k+1})\right).$$

* Comme pour le schéma d'Euler implicite, la relation (15) définit une équation pour calculer u^{k+1} si u^k est connu :

$$(16)\quad u^{k+1} - \frac{\Delta t}{2} f(u^{k+1}) = u^k + \frac{\Delta t}{2} f(u^k).$$

Si la fonction $u \mapsto f(u)$ est "simple", la relation (16) permet un calcul "facile" de u^{k+1} en fonction de u^k. Si f est plus compliquée, la résolution complète de (16) peut être exclue !

- Stabilité

On se borne dans ce paragraphe au cas du problème modèle où (3) est satisfaite. On peut alors étendre sans difficulté les

équations (13) et (16) qui définissent les schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson.
Pour Euler implicite, on a :

(17) $$u^{k+1} = \frac{1}{1+\lambda\Delta t}\, u_k \quad \text{(Euler implicite)}$$

et pour Crank-Nicolson, il vient

(18) $$u^{k+1} = \frac{1-\frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1+\frac{1}{2}\lambda\Delta t}\, u_k \quad \text{(Crank Nicolson)}$$

sans oublier le résultat établi pour Euler explicite :

(19) $$u^{k+1} = (1-\lambda\Delta t)\, u^k \quad \text{(Euler explicite)}.$$

* Pour ces trois schémas, on peut exprimer le rapport u^{k+1}/u^k au cours d'un pas de temps en fonction de $\xi \equiv \lambda\Delta t$. On en déduit

(17)' $$\frac{u^{k+1}}{u^k} = \frac{1}{1+\xi} \quad \text{(Euler implicite)}$$

(18)' $$\frac{u^{k+1}}{u^k} = \frac{1-\xi/2}{1+\xi/2} \quad \text{(Crank-Nicolson)}$$

(19)' $$\frac{u^{k+1}}{u^k} = 1-\xi \quad \text{(Euler explicite)},$$

relations à comparer à ce que propose l'évolution "exacte" du modèle :

(20) $$\frac{u^{k+1}}{u^k} = e^{-\xi} \quad \text{(évolution exacte)}.$$

* Pour ξ petit, les fonctions $\phi_{Ei} = \frac{1}{1+\xi}$, $\phi_{CN} = (1-\xi/2)/(1+\xi/2)$ et $\phi_{Ee} = 1-\xi$ sont de bonnes approximations de l'exponentielle exacte $\exp(-\xi)$.

* L'étude du signe des trois approximations indique qu'on doit choisir ξ de sorte que l'approximation u^{k+1}/u^k soit positive, ce qui est le cas pour la solution exacte (relation (20)). On a donc la condition

(21) $\xi > 0$ pour le schéma Euler implicite

qui donne une solution "acceptable" quel que soit $\Delta t > 0$. Pour le schéma de Crank-Nicolson,

(22) $0 < \xi < 2$ (Crank-Nicolson)

soit une condition $0 < \Delta t < 2/\lambda$ très comparable à celle fournie par le schéma d'Euler explicite, c'est à dire

(23) $0 < \xi < 1$ (Euler explicite).

Dubois mars 2007.