EMMN (3)

Equation de la chaleur à une dimension.

• Modélisation physique.

L'équation de la chaleur exprime la conservation de l'énergie (proportionnelle à la température) en supposant que le flux de chaleur suit la loi de Fourier :

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho C_v T) + \operatorname{div} q = 0$$

$$(2) \qquad q = -k \nabla T.$$

* Dans le cas d'une seule dimension d'espace, on note $u(x,t)$, $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$ le champ de température inconnu et μ la diffusivité. On a alors l'équation d'évolution

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \; t \geq 0$$

* On adjoint, comme aux leçons précédentes, une <u>condition initiale</u> qui est maintenant une fonction de la variable x :

$$(4) \qquad u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Mais il convient aussi de se définir une <u>condition à la limite</u> en $x = 0$ et $x = L$.

On prend dans notre étude une condition de Dirichlet homogène :

(5) $$u(x=0,t) = u(x=L,t) = 0 .$$

* En général, le système (3)(4)(5) composé de l'équation d'évolution de la chaleur, de la condition initiale et des conditions aux limites ne peut pas être résolu de manière analytique. On développe dans la suite l'approche par différences finies.

- <u>Discrétisation spatiale.</u>

On se concentre dans ce paragraphe sur la discrétisation de la dérivée seconde en espace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. On se donne un pas d'espace $\Delta x > 0$ et on suppose u approchée en espace par u_j au point $x_j \equiv j\,\Delta x$, avec j entier ($j \in \mathbb{Z}$).

(6) $$u_j \simeq u(j\,\Delta x) \,, \quad j \in \mathbb{Z} .$$

* Avant d'approcher une dérivée seconde, on approche une dérivée première. On sait que

(7) $$\frac{\partial u}{\partial x}(x) \simeq \frac{1}{\varepsilon}\left(u\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right) - u\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

avec ε arbitrairement petit. La différence finie $\frac{1}{\varepsilon}\left(u\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)-u\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ est d'ailleurs une bonne approximation de $\frac{\partial u}{\partial x}$, puisqu'on a

$$(8) \quad \frac{1}{\varepsilon}\left(u\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)-u\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)=\frac{\partial u}{\partial x}(x)+O(\varepsilon^2).$$

Si on change ε en $\varepsilon/2$, l'erreur entre la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ et son approximation est divisée par 4 typiquement

* La preuve de la relation (8) demande simplement de développer $u(x+\frac{\varepsilon}{2})$ à l'aide de la formule de Taylor :

$$u\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)=u(x)+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(\varepsilon^3).$$

Puis on change le signe de ε dans la relation précédente :

$$u\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)=u(x)-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(\varepsilon^3)$$

Par différence,

$$u\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)-u\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}(x)+O(\varepsilon^3)$$

et par division par ε, on établit la relation (8)

* Avec une grille de pas Δx, la "plus petite différence finie" que l'on peut former va faire intervenir un point x et un pas $\varepsilon > 0$ tel que $x-\frac{\varepsilon}{2}=j\Delta x$

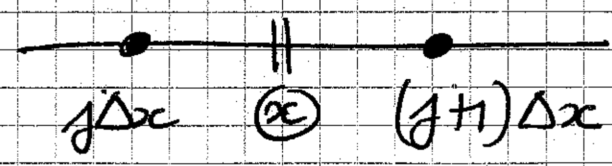

Figure 1

et $x+\frac{\varepsilon}{2}=(j+1)\Delta x$, soit

(9) $x=(j+\frac{1}{2})\Delta x$, $\varepsilon=\Delta x$

on écrit alors la relation (7) sous la forme

(10) $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{\Delta x}\left(u_{j+1}-u_j\right)$$

* On passe ensuite à l'approximation de la dérivée seconde. On procède de même, en remplaçant u par la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ dans la relation (7). Il vient, en changeant le nom du point pivot :

(11) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(y) \simeq \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\left(y+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\left(y-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

* on dispose maintenant d'une approximation de la dérivée seconde en $y=j\,\Delta x$, avec $\varepsilon=\Delta x$, puisque la dérivée première est "lieu" approchée aux points $(j+\frac{1}{2})\Delta x$ de coordonnées demi-entières. On a donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j) \simeq \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+\frac{1}{2}}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j-\frac{1}{2}}\right]$$

et on développe la relation précédente à l'aide de la formule (10) :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x_j) \simeq \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{\Delta x}\left(u_{j+1}-u_j\right)-\frac{1}{\Delta x}\left(u_j-u_{j-1}\right)\right)$$

c'est à dire

$$(12) \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \simeq \frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right).$$

en notant $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j$ au lieu de $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x_j)$.

* on remarque que si $u(x)$ est approchée par ses valeurs u_j aux points $j\Delta x$, $0 \leq j \leq J$, J choisi tel que

$$(13) \qquad J\Delta x = L,$$

on peut facilement approcher $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j)$ aux points $j\Delta x$ pour lesquels on dispose d'un voisin "à gauche" $(j-1)\Delta x$ et d'un voisin "à droite" en $(j+1)\Delta x$, soit pour des sommets x_j du maillage tels que $1 \leq j \leq J-1$ avec les notations précédentes. Pour les deux valeurs extrêmes en $j=0$ et $j=J$ (ie $x=0$ et $x=L$), la relation (12) n'est pas utilisable car on manque de données.

Dubois mars 2007.