stabilité du schéma explicite pour l'équation de la chaleur.

• Schéma explicite pour la chaleur.

Nous étudions l'évolution de $u(x,t)$ qui suit l'équation de la chaleur

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ , \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}$

à une dimension d'espace. Nous discrétisons l'espace avec un pas d'espace Δx et le temps à l'aide de Δt. Nous cherchons une approximation u_j^n de $u(j\Delta x, n\Delta t)$ ($j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) en discrétisant $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ avec un schéma à trois points :

(2) $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \simeq \dfrac{1}{\Delta x^2}\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right)$

et en utilisant un <u>schéma d'Euler explicite</u> en temps :

(3) $\dfrac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) - \dfrac{\mu}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right), \quad j \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}$

On pose

(4) $\qquad \sigma = \mu \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Alors u_j^{n+1} peut s'évaluer très simplement à partir de l'ensemble des $(u_k^n)_{k\in\mathbb{Z}}$ à l'instant antérieur:

(5) $u_j^{n+1} = u_j^n + \mathcal{S}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$, $j\in\mathbb{Z}$.

- analyse de Van Neumann.

L'idée est d'introduire une onde de vecteur K à l'instant n:

(6) $u_j^n = \hat{u}(K)\exp(iKj\Delta x)$, $j\in\mathbb{Z}$

alors compte tenu des propriétés algébriques classiques de la fonction exponentielle, on a

(7) $u_{j+1}^n = \exp(iK\Delta x)\, u_j^n$, $j\in\mathbb{Z}$.

* on introduit le nombre d'onde ξ selon la relation

(8) $\xi = K\Delta x$

alors $u_{j+1}^n = e^{i\xi} u_j^n$ et $u_{j-1}^n = e^{-i\xi} u_j^n$.

On reporte ces valeurs dans le schéma (5) et on a le calcul qui suit:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \rho\left(e^{i\xi} u_j^n - 2u_j^n + e^{-i\xi} u_j^n\right)$$
$$= \left(1+\rho(e^{i\xi}-2+e^{-i\xi})\right) u_j^n$$

* on introduit maintenant le <u>coefficient d'amplification du schéma</u> $g(\rho,\xi)$:

(9) $\quad g(\rho,\xi) \equiv 1+\rho(e^{i\xi}-2+e^{-i\xi})$.

Le calcul précédent établit donc que

(10) $\quad u_j^{n+1} = g(\rho,\xi)\, u_j^n \;,\; j \in \mathbb{Z}$

pour une onde de nombre d'onde ξ

* Un ordinateur classique effectue toujours des calculs <u>faux</u>, ie avec des erreurs d'arrondis, avec une précision relative de 10^{-15} au mieux avec les arithmétiques qu'emploie actuellement le logiciel "octave". Si on décompose une telle erreur d'arrondis sur des ondes de la forme (6), une condition nécessaire au bon déroulement du calcul est que ces ondes ne s'amplifient pas. Or le schéma (5), pour une onde, se traduit par une simple multiplication par le coefficient d'amplification $g(\rho,\xi)$.

Après N pas de temps, on a donc

$$(11) \qquad u_j^{n+N} = \left(g(\varsigma,\xi)\right)^N u_j^n \quad , j\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}$$

L'onde correspondante n'est pas amplifiée si et seulement si la suite géométrique (11) ne tend pas vers l'infini, ie si et seulement si le coefficient d'amplification $g(\varsigma,\xi)$ est de module inférieur ou égal à 1. ~~Et~~ ce raisonnement doit être reconduit pour toute onde (ie pour tout $\xi\in\mathbb{R}$) afin de garantir la stabilité du schéma

* D'où la définition. Le schéma (5) est stable au sens de Von Neumann si et seulement si

$$(12) \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}, \ |g(\varsigma,\xi)| \leq 1 \,.$$

* Il suffit maintenant d'écrire le critère (12) pour $g(\varsigma,\xi)$ proposé à la relation (9) on a d'abord le calcul élémentaire :

$$\begin{aligned} g(\varsigma,\xi) &= 1+\varsigma(2\cos\xi-2) \\ &= 1-2(1-\cos\xi)\varsigma \\ &= 1-4\varsigma\sin^2\frac{\xi}{2}\,. \end{aligned}$$

(13) $$g(\rho,\xi) = 1 - 4\rho \sin^2\frac{\xi}{2}.$$

On écrit la relation (12) pour la valeur particulière $\xi = \pi$. Alors $\sin^2\frac{\xi}{2} = 1$ et $g(\rho,\xi) = 1 - 4\rho$. $|g(\rho,\pi)| \leq 1$ s'écrit donc :

$$-1 \leq 1 - 4\rho \leq 1$$

c'est à dire

(14) $$0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}.$$

Réciproquement, si ρ satisfait à (14), on a avec $\xi \in \mathbb{R}$ arbitraire la série d'inégalités suivantes :

$$0 \leq \rho \sin^2\frac{\xi}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$-2 \leq -4\rho \sin^2\frac{\xi}{2} \leq 0$$

$$-1 \leq 1 - 4\rho \sin^2\frac{\xi}{2} \leq 1$$

d'où la relation (12). Nous venons d'établir la propriété suivante :

- le schéma explicite pour l'équation de la chaleur est stable si et seulement si (14) a lieu, ie

(15) $$0 \leq \Delta t \leq \frac{1}{2\mu} \Delta x^2$$

FDubois mars 07.
av 08.