Méthode des caractéristiques pour l'équation d'advection

- On se donne un réel a fixé et on cherche $u(x,t) \in \mathbb{R}$ de sorte que

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

On se donne aussi une fonction $x \mapsto u_0(x)$ qui est condition initiale pour l'équation d'évolution (1) :

(2) $$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le système (1)(2) admet une solution exacte. Plus encore que son expression, c'est la construction de cette solution avec la méthode des caractéristiques qui va retenir notre intérêt.

- On remarque d'abord que a est homogène au rapport d'un "espace" sur un "temps", i.e. une célérité. Avec Lagrange, on introduit des trajectoires de particules, i.e. une solution $t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}$ de l'équation différentielle (satellite)

(3) $$\frac{dX}{dt} = a, \quad t > 0$$

à laquelle on joint la condition initiale

(4) $$X(0) = y, \quad y \in \mathbb{R} \text{ fixé}.$$

On note $v(t) = u(X(t), t)$ la solution de (1)(2) (éventuelle) considérée sur la trajectoire (3)(4). On a alors la

Proposition (1) La fonction $t \mapsto u(X(t), t)$ ne dépend pas du temps.

La preuve consiste à supposer la solution de (1)(2) régulière et à dériver la fonction composée :

$$\frac{d}{dt}[u(X(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dX}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \times a + \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{compte tenu de (3)}$$

$$= 0 \quad \text{car } u(\cdot,\cdot) \text{ est solution de (1)}.$$

La solution est constante le long des caractéristiques. On exploite ce fait $v(0) = v(t)$. D'une part,

$$v(t) = u(X(t), t) = u(at + y, t) \quad \text{par intégration de (3), (4)}$$

$$= v(0) = u(X(0), 0) = u_0(X(0)) \quad \text{compte tenu de (2)}$$

$$= u_0(y) \quad \text{au vu de (4)}.$$

On en conclut que nécessairement $u(at+y, t) = u_0(y)$ pour tout $t \geq 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$. Par le changement de variables $x = at + y$, on a montré la

Proposition (2). Si $u(\cdot,\cdot)$ est solution régulière de (1)(2), on a nécessairement

$$(5) \quad u(x,t) = u_0(x - at), \quad x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0.$$

- L'interprétation de la relation (5) est élémentaire : le profil initial $u_0(\bullet)$ est translaté au cours du temps avec la vitesse a. Attention, on a un signe "$-$" au membre de droite de la relation (5) et l'advection (le transport sans déformation) s'effectue avec la vitesse $+a$.

- En pratique, on effectue l'étude précédente dans un intervalle borné $[0,L]$, $L>0$. Supposons $a>0$ pour fixer les idées. On peut calculer $u(x,t)$ à l'aide de la relation (5) tant que $x-at$ appartient à l'intervalle $[0,L]$, donc en particulier pour $x-at\geq 0$ ie $x\geq at$. Pour $x\leq at$, le "pied" $y = x-at$ de la caractéristique (au temps initial) est à l'extérieur du domaine d'étude $[0,L]$ et la condition initiale (2) n'est plus utilisable. On se donne donc une condition à la limite en $x=0$:

$$(6) \quad u(0,t) = g(t), \quad t\geq 0, \ x\in[0,L], \ a>0$$

afin de compléter les données. La méthode des caractéristiques est alors utilisée entre $t>0$ et un instant $\theta>0$ tel que $X(\theta)=0$.

$$v(t) = u(at+y,t) = v(\theta) = u(X(\theta),\theta)$$
$$= u(a\theta+y,\theta) = u(0,\theta) = g(\theta).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer θ, sachant que $x + a\theta = 0$. On en déduit $\theta = -\frac{1}{a}(x - at)$

(7) $u(x,t) = g\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad x - at \leq 0, \quad a > 0.$

o La solution du problème (1)(2)(6) est donnée par les relations (5) avec $x - at \geq 0$ et (7).
On remarque qu'aucune condition à la limite en $x = L$ n'est utile (pour ce cas $a > 0$ et le domaine d'étude est l'intervalle $[0, L]$ avec $L > 0$), alors qu'en $x = 0$, on doit se donner la relation (6) pour résoudre le problème. On dit que la frontière $x = 0$ correspond à une caractéristique entrante alors que $x = L$ est une frontière sortante. Bien entendu, si on change le signe de a, les rôles des deux frontières s'échangent.

• On cherche maintenant à résoudre (1)(2)(6) de façon approchée à l'aide d'un schéma aux différences. On introduit un pas d'espace $\Delta x = \frac{L}{J}$ ($j = 0, 1, \ldots, J$ pour couvrir l'intervalle $[0, L]$), un pas de temps Δt. On discrétise la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ par un schéma centré :

(8) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(j\Delta x, n\Delta t) \simeq \frac{1}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}\right)$

avec $u_j^n \simeq u(j\Delta x, n\Delta t)$.

on utilise aussi un schéma en temps explicite

$$(9) \quad \frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) + \frac{a}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) = 0$$

$$1 \leq j \leq J-1$$

* Afin de définir complètement l'algorithme, on pose pour $j=0$:

$$(10) \quad u_0^{n+1} = g\left((n+1)\Delta t\right), \quad n \geq 0.$$

Pour $j = J$, la relation (9) ne s'applique pas (u_{J+1}^n n'existe pas !) et on ne dispose pas de donnée à la limite en $x = L$!! On décide alors d'approcher la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ par un schéma <u>décentré à gauche</u>

$$(11) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(L, n\Delta t) \simeq \frac{1}{\Delta x}\left(u_J^n - u_{J-1}^n\right),$$

d'où le schéma suivant pour le dernier point.

$$(12) \quad \frac{1}{\Delta t}\left(u_J^{n+1} - u_J^n\right) + \frac{a}{\Delta x}\left(u_J^n - u_{J-1}^n\right) = 0, \quad a > 0$$

- on constate expérimentalement que l'algorithme défini par les relations (9)(10)(12) transporte bien le profil initial vers la droite (si $a > 0$) pendant un certain temps, mais qu'ensuite le calcul "diverge" de manière très spectaculaire. En effet, le schéma (9) est <u>instable</u>. On peut en mener l'analyse comme au chapitre 5, en supposant qu'on travaille sur une grille de taille infinie ($j \in \mathbb{Z}$). On introduit le nombre de Courant

$$(13) \qquad \sigma = \frac{a \Delta t}{\Delta x} .$$

Alors la relation (9) prend la forme

$$(14) \qquad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\sigma}{2} \left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n \right), \, j \in \mathbb{Z} .$$

Si u_j^n est une onde de nombre d'onde $\xi = k \Delta x$, l'itération (14) se réduit à une simple amplification

$$(15) \qquad u_j^{n+1} = g(\sigma, \xi) \, u_j^n \quad , \, j \in \mathbb{Z}$$

avec

$$(16) \qquad g(\sigma, \xi) = 1 - i \sigma \sin \xi .$$

Ce nombre complexe est de module strictement supérieur à 1 si $\xi \neq$ multiple de π (sauf pour $\sigma = 0$...). Les erreurs d'arrondis s'amplifient. Le schéma est instable.

Dubois, 6 avril 2007