EMMN (8)

Introduction à l'advection - diffusion

- Nous nous donnons $a > 0$, $\mu > 0$ et nous cherchons $u(x,t) \in \mathbb{R}$ solution de l'équation dite "advection - diffusion" :

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + a \dfrac{\partial u}{\partial x} - \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0,L], \; t > 0$

jointe à une condition initiale

(2) $u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in [0,L]$

- Pour $a = 0$, on retrouve la diffusion pure, pour laquelle on a adopté une <u>double</u> condition limite en $x = 0$ et $x = L$:

(3) $u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = w(t), \; \mu \neq 0$

Pour $\mu = 0$, on retrouve l'advection, pour laquelle si $a > 0$, une <u>seule</u> condition à la limite

(4) $u(0,t) = g(t) \quad , \; a > 0, \; \mu = 0$

est nécessaire.

- Se donner le <u>bon nombre</u> de conditions à la limite est déjà une difficulté !

Une règle (heuristique qu'on peut justifier à l'aide d'arguments mathématiques qui dépassent le cadre de ce cours consiste à regarder l'équation obtenue en ne conservant que la dérivée en x de plus <u>haut</u> degré.
Ainsi pour $\mu = 0$, on a une advection pure et on sait qu'alors (pour $a > 0$), la condition limite (4) conduit à un problème bien posé.
Pour $\mu \neq 0$, l'équation obtenue en "oubliant" le terme de dérivation du premier ordre, i.e $a\frac{\partial u}{\partial x}$ se réduit à l'équation de la chaleur pour laquelle les conditions aux limites (3) conduisent à un problème bien posé.

- Dans la suite, nous supposons $\mu \neq 0$ et nous nous donnons les conditions aux limites suivantes :

(5) $\quad u(0,t) = 0 \; ; \quad u(L,t) = 1, \; t > 0$

Il est alors possible de <u>calculer</u> la solution du problème stationnaire obtenu en remplaçant $\frac{\partial u}{\partial t}$ par zéro au sein de l'équation (1) :

(6) $\quad a\frac{\partial u}{\partial x} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \; x \in [0,L]$,'.

(Prop) (1) <u>Solution stationnaire</u>

La solution $u^q(x)$ de (6)(5) est une "couche limite" qui s'écrit

$$(7) \qquad u^{\infty}(x) = \frac{\exp\left(\frac{ax}{\mu}\right) - 1}{\exp\left(\frac{aL}{\mu}\right) - 1}, \quad 0 \leq x \leq L$$

Preuve de la proposition 1

* L'équation (6) peut s'intégrer sans difficulté une fois, d'où

$$(8) \qquad a\,u - \mu \frac{\partial u}{\partial x} = \text{constante}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

On peut à nouveau intégrer la relation (8) qui contient d'une part une solution particulière (constante !) et la solution générale de l'équation sans second membre : u proportionnel à $\exp \frac{ax}{L}$. D'où

$$(9) \qquad u^{\infty}(x) = \alpha + \beta \exp \frac{ax}{L}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

* En forçant $u^{\infty}(0) = 0$ et $u^{\infty}(L) = 1$, on obtient alors sans difficulté la relation (7) à partir de la représentation (9). $\square$

• Afin d'approcher la solution de (1) (5) avec une condition initiale (2) associée par exemple à la fonction

$$(10) \qquad u_0(x) = 16 \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)\right)^2, \quad 0 \leq x \leq L$$

on utilise un maillage de pas $\Delta x = \frac{L}{J}$, un pas de temps Δt, et

(11) $u_j^n \simeq u(j\Delta x, n\Delta t)$, $0 \leq j \leq J$, $n \geq 0$

- Le schéma numérique le plus simple s'obtient en combinant le schéma centré en espace explicite en temps pour le rayon de la chaleur $\left(-\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ [cf chapitre 3] et le schéma décentré en espace explicite en temps pour l'advection $\left(a \frac{\partial}{\partial x}\right)$ [cf chapitre 7] on propose donc d'utiliser l'algorithme suivant

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) + \frac{a}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) - \frac{\mu}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) = 0 \\ 1 \leq j \leq J-1, \; a > 0 \end{cases}$$

avec les valeurs suivantes aux deux bouts :

(13) $u_0^n = 0$, $u_J^n = 1$, $n \geq 1$.

On pose

(14) $\sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x} > 0$, $\varphi = \frac{\mu \Delta t}{\Delta x^2} > 0$.

alors la relation (12) permet le calcul explicite de u^{n+1} en fonction des valeurs au pas de temps antérieur :

(15) $u_j^{n+1} = u_j^n - \sigma\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) + \varphi\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$.

- Une question naturelle est liée au choix des paramètres σ et δ. Si $\mu = 0$, on sait que σ doit vérifier la relation de stabilité

(16) $$\sigma \leq 1$$

et pour $a = 0$, le paramètre δ doit être tel que

(17) $$\delta \leq \frac{1}{2}.$$

Le minimum à demander est donc que les relations (16) et (17) aient lieu.

- On peut relier le nombre de Reynolds

(18) $$R \equiv \frac{aL}{\mu}$$

caractéristique de ce problème (puisque la solution $u^\infty(\cdot)$ de (7) peut aussi s'écrire $u^\infty(x) = (\exp(Rx/L) - 1)/(\exp R - 1)$) aux paramètres numériques σ et δ. On a en effet

$$R = \frac{aL}{\mu} = \frac{a\Delta t}{\mu \Delta t} L = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \frac{L}{\frac{\mu \Delta t}{\Delta x^2}} \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sigma}{\delta} \frac{L}{\Delta x} = \frac{\sigma}{\delta} J$$

(19) $$\sigma = R \frac{\delta}{J}, \quad J \text{ nombre de points de grille}$$

- En pratique, on peut prendre $J = \frac{1}{4}$ et le fixer à cette valeur, puis imposer σ grâce à la relation (19). On constate alors que le pas de temps Δt est alors proportionnel à $\frac{1}{J^2}$, ce qui montre que le coût d'un tel calcul avec le schéma explicite (15) peut devenir prohibitif.

- Afin de pouvoir atteindre la "solution stationnaire (7) à partir de la condition initiale (10) en réduisant le nombre d'itérations en temps, on remplace le schéma explicite en temps (12) par un schéma implicite en temps en utilisant les approximations $a\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ au temps $(n+1)\Delta t$ au lieu du temps $n\Delta t$. On remplace alors la relation (12) par

$$(20)\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) + \frac{a}{\Delta x}\left(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}\right) - \frac{\mu}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right) \\ \qquad = 0, \quad 1 \le j \le J-1, \quad n \geq 0\end{array}\right.$$

tout en gardant les conditions limites discrètes (13). Dans la relation (20), seul u_j^n est donné et les $\left(u_k^{n+1}\right)_{1\le k\le J-1}$ sont tous inconnus!
On peut écrire aussi

(21) $\left(1+\sigma+2\rho\right)u_j^{n+1} - (\sigma+\rho)u_{j-1}^{n+1} - \rho u_{j+1}^{n+1} = u_j^n$

pour $1 \leq j \leq J-1$, soit de façon précise :

(22) $(1+\sigma+2\rho)u_1^{n+1} - \rho u_2^{n+1} = u_1^n$ pour $j=1$,

la relation (21) sans modification pour $j=2, 3, \dots, J-2$ et enfin

(23) $(1+\sigma+2\rho)u_{J-1}^{n+1} - (\sigma+\rho)u_{J-2}^{n+1} = u_{J-1}^n + \rho$, $j=J-1$

où le second membre prend en compte la relation $u_J^{n+1} = 1$.

- on doit résoudre un <u>système linéaire tridiagonal</u> qu'on peut écrire

(24) $$A X = f$$

où $X = (u_1^{n+1}, \dots, u_j^{n+1}, \dots, u_{J-1}^{n+1})^t \in \mathbb{R}^{J-1}$

est le vecteur des inconnues,

(25) $$f = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{J-2}^n, u_{J-1}^n + \rho)^t$$

le second membre et A est une matrice carrée d'ordre $(J-1)$ qui, compte tenu de (21) (22) (23), prend la forme

$$A = \begin{bmatrix} 1+\sigma+2\rho & -\rho & & & & \\ -\sigma-\rho & 1+\sigma+2\rho & \ddots & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\sigma-\rho & 1+\sigma+2\rho & -\rho & \\ & & & \ddots & \ddots & -\rho \\ & 0 & & & -\sigma-\rho & 1+\sigma+2\rho \end{bmatrix}$$

avec

$$(26) \begin{cases} A_{jj} = 1+\sigma+2\rho, & 1 \leq j \leq J-1 \\ A_{j,j+1} = -\rho, & 1 \leq j \leq J-2 \\ A_{j,j-1} = -\sigma-\rho, & 2 \leq j \leq J-1 . \end{cases}$$

- La résolution <u>générale</u> d'un système tri-diagonal de la forme (24) est classique. Afin d'être générique, on remplace les relations (26) par des diagonales quelconques:

$$(27) \begin{cases} A_{jj} = a_j, & 1 \leq j \leq n \\ A_{j,j+1} = b_{j+1}, & 1 \leq j \leq n-1 \\ A_{j,j-1} = c_j & 2 \leq j \leq n. \end{cases}$$

c'est à dire

$$(28)\quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & & & & \\ c_2 & a_2 & \ddots & & & \bigcirc \\ & \ddots & \ddots & b_j & & \\ & & c_j & a_j & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & b_n \\ \bigcirc & & & & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

avec l'ordre de la matrice qu'on écrit "n" au lieu de "$J-1$". On va factoriser A sous la forme d'un produit d'une matrice L ("lower") triangulaire <u>inférieure</u> et à diagonale unité par une matrice U ("upper") triangulaire <u>supérieure</u> à diagonale quelconque :

$$(29)\qquad A = L \times U$$

$$(30)\qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ & \gamma_3 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & \gamma_n \end{pmatrix}$$

$$(31)\quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & & \bigcirc \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \beta_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

• Les coefficients α_j, β_j, γ_j se calculent sans difficulté (sauf si l'un des α_j est nul), ainsi que le montre par exemple le cas où $n=3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_2\alpha_1 & \alpha_2+\gamma_2\beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_3\alpha_2 & \alpha_3+\gamma_3\beta_3 \end{pmatrix}$$

et les relations (28) (29) imposent le calcul :

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= a_1 \\ \gamma_2 &= c_2/\alpha_1 \\ \beta_2 &= b_2 \\ \alpha_2 &= a_2 - \beta_2\gamma_2 \\ \gamma_3 &= c_3/\alpha_2 \\ \beta_3 &= b_3 \\ \alpha_3 &= a_3 - \beta_3\gamma_3 \end{aligned} \right.$$

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que pour n quelconque, les relations (32) deviennent l'algorithme suivant

$$(33)\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = a_1 \\ \left[\begin{array}{l} \text{boucle } j : 2 \to n \\ \gamma_j = c_j / \alpha_{j-1} \\ \beta_j = b_j \\ \alpha_j = a_j - \beta_j \gamma_j . \end{array}\right. \end{array}\right.$$

- Une fois la matrice A factorisée sous la forme (29) [on parle d'une factorisation de Gauss], la résolution du système linéaire (24) se ramène à la résolution de <u>deux systèmes</u> linéaires <u>tridiagonaux</u>. Compte tenu de (24) et (29), on a

$$(34) \qquad LUX = f$$

on pose

$$(35) \qquad UX = y .$$

Donc (34) équivaut à la <u>double</u> résolution de (35) et (36)

$$(36) \qquad Ly = f$$

- La résolution de (36), compte tenu de la forme très particulière (30) de la matrice L, s'effectue de proche en proche:

$$(37)\quad \begin{cases} y_1 = f_1 \\ \left[\begin{array}{l} \text{boucle } j : 2 \longrightarrow n \\ y_j = f_j - \gamma_j \, y_{j-1} . \end{array}\right. \end{cases}$$

On dit que (37) permet d'effectuer une <u>descente</u>. Pour résoudre (35) une fois y calculé, on fait de même mais en commençant par la <u>dernière</u> équation ! Nous construisons ainsi l'algorithme dit de <u>remontée</u>.

$$(38)\quad \begin{cases} x_n = y_n / \alpha_n \\ \left[\begin{array}{l} \text{boucle } i : 1 \longrightarrow n-1 \\ j = n - i \\ x_j = (y_j - \beta_{j+1} \, x_{j+1}) / \alpha_j . \end{array}\right. \end{cases}$$

Dubois
30 avril 2007
6 juin 2008