Conservatoire National des Arts et Métiers
Modélisation Numérique en Génie des Procédés
Automne 2015

Travaux pratiques

TP1. On s'intéresse au modèle qui consiste à chercher $u(t)$ de sorte que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t)}{2} = 0 \text{ pour } t > 0$$

avec $u(0) = 1$. On se propose de calculer V solution du modèle précédent pour l'instant $T = 0,5,$ ce avec une bonne précision.

1) Proposer (en justifiant votre réponse) une valeur du nombre de pas de temps N. Quelle est alors la valeur du pas de temps Δt ? Utiliser le schéma d'Euler explicite pour calculer une première valeur approchée de V que l'on notera v_1.

2) Quelle valeur w_1 obtient-on si on remplace le schéma d'Euler explicite par le schéma d'Euler implicite ?

3) Même question avec z_1 calculé avec le schéma de Crank-Nicolson.

4) Calculer les erreurs $|\, v_1 - V \,|,\ |\, w_1 - V \,|,\ |\, z_1 - V \,|$.

5) On double le nombre de pas de temps pour arriver à la même valeur $T = 0,5$. On remplace donc le pas de temps Δt par $\Delta t/2$. On calcule une nouvelle valeur approchée avec cette nouvelle discrétisation au moyen des trois schémas précédents. On remarque qu'on doit alors utiliser deux fois plus de pas de temps. On note les trois résultats obtenus $v_2,\ w_2,$ et z_2 respectivement. Calculer les nouvelles erreurs $|\, v_2 - V \,|,\ |\, w_2 - V \,|$ et $|\, z_2 - V \,|$. Que remarquez-vous ?

TP2. On approche la solution $u(x,\, t)$ du modèle de la chaleur à une dimension spatiale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } 0 < x < 1 \text{ et } t > 0.$$

La condition initiale choisie est $u(x,\, 0) = \sin(\pi\, x)$ et on prend une condition limite de Dirichlet homogène : $u(0,\, t) = u(1,\, t) = 0$ pour $t > 0$. On utilise pour cela le schéma aux différences finies explicite classique

$$\frac{1}{\Delta t}\,(u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{1}{\Delta x^2}\,(\, u_{j+1}^n - 2\, u_j^n + u_{j-1}^n \,) = 0.$$

1) Calculer la solution exacte $V \equiv u\big(\frac{1}{4}\,,\, \frac{1}{200}\big)$ de ce modèle pour $x = 0,25$ et $T = 0,005$.

2) En utilisant une première grille ($0 \leq j \leq J,\ \ J \simeq 30$ typiquement) et un nombre de pas de temps adéquats ($0 \leq n \leq N$ avec N à déterminer), calculer une solution approchée de V qu'on notera v_1. Quelle est la valeur de l'erreur $|\, v_1 - V \,|$?

3) Doubler le nombre J de pas d'espace en laissant **fixe** le paramètre $\zeta \equiv \Delta t / \Delta x^2$. Comment faut-il modifier le nombre de pas de temps N pour atteindre à nouveau la valeur finale $T = 0,005$? Calculer alors une seconde valeur approchée v_2 du nombre V défini à la première question. Quelle est la valeur de l'erreur $|\, v_2 - V \,|$? Que remarquez-vous ?

TP3. On approche la solution $u(x,\, t)$ du modèle de la chaleur à une dimension spatiale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ pour } 0 < x < 1 \text{ et } t > 0.$$

La condition initiale choisie est maintenant $u(x,\, 0) = 7\,x - 6\,x^2$ et on prend une condition limite de Dirichlet non homogène : $u(0,\, t) = 0$ et $u(1,\, t) = 1$ pour $t > 0$. On utilise pour cela le schéma aux différences finies implicite classique

$$\frac{1}{\Delta t}\,(u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{1}{\Delta x^2}\,(\,u_{j+1}^{n+1} - 2\,u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\,) = 0.$$

En utilisant des grilles de plus en plus fines ($0 \leq j \leq J$, $20 \leq J \leq 150$ typiquement), le nombre de pas de temps adéquats ($0 \leq n \leq N$ avec N à déterminer) et en laissant **fixe** le paramètre $\zeta \equiv \Delta t / \Delta x^2$, proposer une valeur approchée pour le nombre $u\big(\frac{1}{4},\, \frac{1}{2}\big)$ pour $x = \frac{1}{4}$ et $T = \frac{1}{2}$. La réponse devra être justifiée **très** soigneusement.

Bonus. Reprendre la question précédente en utilisant le schéma du second ordre en espace et en temps :

$$\frac{1}{\Delta t}\,(u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{1}{2\,\Delta x^2}\Big[\,(\,u_{j+1}^{n+1} - 2\,u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\,) + (\,u_{j+1}^{n} - 2\,u_j^{n} + u_{j-1}^{n}\,)\Big] = 0.$$

édition octobre 2015.