le cnam

Conservatoire National des Arts et Métiers

Modélisation Numérique en Génie des Procédés
Travaux pratiques

TP2.

On approche la solution $u(x,\,t)$ du modèle de la chaleur à une dimension spatiale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ \text{ pour } \ 0 < x < 1 \ \text{ et } \ t > 0.$$

La condition initiale choisie est

$$u(x,\,0) = \sin(\pi\,x) \ \text{ pour } \ 0 \leq x \leq 1$$

et on prend une condition limite de Dirichlet homogène :

$$u(0,\,t) = u(1,\,t) = 0 \ \text{ pour } \ t > 0.$$

On utilise pour cela le schéma aux différences finies implicite classique

$$\frac{1}{\Delta t}\,(u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{1}{\Delta x^2}\,(\,u_{j+1}^{n+1} - 2\,u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\,) = 0.$$

[Si l'auditeur ne dispose pas d'un programme python qui résout le schéma implicite précédent, il peut utiliser à la place le schéma explicite

$$\frac{1}{\Delta t}\,(u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{1}{\Delta x^2}\,(\,u_{j+1}^{n} - 2\,u_j^{n} + u_{j-1}^{n}\,) = 0.\,]$$

1) Calculer la solution exacte $V \equiv u\big(\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{200}\big)$ de ce modèle pour $x = 0,25$ et $T = 0,005$.

2) En utilisant une première grille ($0 \leq j \leq J,\ \ J \simeq 30$ typiquement) et un nombre de pas de temps adéquats ($0 \leq n \leq N$ avec N à déterminer), calculer une solution approchée de V qu'on notera v_1. Quelle est la valeur de l'erreur $|\,v_1 - V\,|$?

3) Doubler le nombre J de pas d'espace en laissant **fixe** le paramètre $\zeta \equiv \Delta t/\Delta x^2$. Comment faut-il modifier le nombre de pas de temps N pour atteindre à nouveau la valeur finale $T = 0,005$?

Calculer alors une seconde valeur approchée v_2 du nombre V défini à la première question.

Quelle est la valeur de l'erreur $|\,v_2 - V\,|$?

Que remarquez-vous ?

édition automne 2018