le cnam

Introduction à la mécanique des fluides

Saint-Denis, printemps 2014

Cours 01

Hydrostatique

- Equilibre mécanique
- Milieu continu
- Pression
- Tenseur des contraintes
- Théorème d'Archimède
- Pression hydrostatique

François Dubois

Introduction à la Mécanique des FlUides.
(STN-2, CNAM Saint Denis)

① Hydrostatique.

- **Equilibre.**

Dans le cas d'un système mécanique S formé de N masses m_j localisées aux points M_j et soumis à N forces $\vec{f_j}$ localisées aux sommets M_j, l'équilibre s'écrit en introduisant la résultante $\vec{R}$ de ces forces et le moment $\vec{\mathcal{M}_0}$ en un point arbitraire. On a

$$(1) \quad \vec{R} = \sum_{j=1}^{N} \vec{f_j} \,, \quad \vec{\mathcal{M}_0} = \sum_{j=1}^{N} \vec{OM_j} \times \vec{f_j} \,.$$

L'équilibre mécanique consiste à écrire que le torseur formé du couple $(\vec{R}, \vec{\mathcal{M}_0})$ est nul :

$$(2) \quad \vec{R} = \vec{0}, \quad \vec{\mathcal{M}_0} = \vec{0}.$$

- **Milieu continu.**

Dans le cas d'un milieu continu déformable, fluide ou structure, les forces sont distribuées sur tous les points du système et les sommes telles que celles de la relation (1) doivent être remplacées par des intégrales.

La question fondamentale est la suivante : si on plonge un corps rigide de frontière Σ formée d'éléments "infinitésimaux" $d\sigma$, de normale $\vec{n}$ (Fig 1), quelle est la force $\vec{df}$ reçue par le corps rigide ?

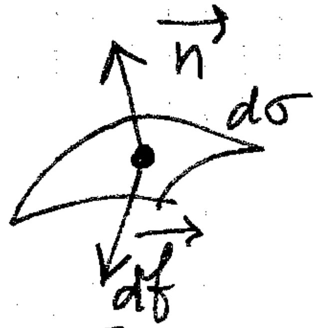

Fig. 1

Pour l'air dans les conditions usuelles, la réponse est loin d'être évidente ! Il faut attendre le milieu du 17e siècle et la possibilité de disposer de vide (absence d'air) pour que soit mise en évidence la notion de pression.

- Force de pression.

Dans le cas d'un fluide au repos, la force $\vec{df}$ qui agit sur une surface $d\sigma$ de normale $\vec{n}$ est donnée par la relation

$$(3) \qquad \vec{df} = -p\,\vec{n}\,d\sigma .$$

Le nombre p au membre de droite de (3) est la pression. Pour l'air ambiant, on a $p_0 \simeq 1{,}013\ 10^5$ pascals.

Il s'agit d'une force énorme ! En effet, si on prend $d\sigma = 1\text{cm}^2$, le module $|\vec{df}|$ de la force de pression atmosphérique vaut environ 10 Newtons, soit le poids d'une masse de 1 kilogramme !

On ne "ressent" pas facilement cette force car elle est a priori en équilibre autour de notre corps et de tous les solides ; en effet, si on calcule la résultante $\vec{R}$ dans le cas où $p = p_0$ est constante, on a

$$\vec{R} = \int_{\partial\Omega} (-p)\vec{n}\, d\sigma = -p_0 \int_{\partial\Omega} \vec{n}\, d\sigma = -p_0 \int_{\Omega} (\vec{\nabla} 1)\, dx = 0.$$

Si la pression est constante, sa résultante est nulle autour d'une surface fermée $\partial\Omega$.

Pour une surface "ouverte" comme celle des deux demi-sphères de Magdebourg (1654), un <u>vide</u> est établi et les deux hémisphères restent en contact à cause de la pression de l'air. Une force très élevée (voir exercice !) est nécessaire pour les désolidariser.

- <u>Tenseur des contraintes</u>

Dans le cas d'un milieu continu général (air, eau, solide élastique, etc), la relation $\vec{df}$ qui donne l'action du milieu sur une petite surface $d\sigma$ de normale $\vec{n}$ n'est pas forcément donnée par la relation (3). On introduit le vecteur des contraintes $\vec{T}(\vec{n})$ qui dépend de la direction normale et la relation (3) se généralisé selon

$$(4) \quad \vec{df} = \vec{T}(\vec{n})\, d\sigma .$$

- On peut démontrer que la fonction $\mathbb{R}^3 \ni \vec{n} \longmapsto \vec{T}(\vec{n}) \in \mathbb{R}^3$ est linéaire. Il existe donc une application linéaire (un tenseur dans le langage consacré par la mécanique) représentée par une matrice σ de composantes $\sigma_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i,j \leq 3$ de sorte que

$$(5) \qquad T_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\, n_j\,, \quad 1 \leq i \leq 3 .$$

Prop Pour un fluide au repos, on a

$$(6) \qquad \sigma = -\, p\, Id$$

où Id est la matrice identité 3 par 3

- Preuve

Il suffit de rapprocher les relations (3) et (4)(5). On a donc pour tout $\vec{n}$,

$$-p\vec{n} = \sigma . \vec{n}$$

où $\sigma . \vec{n}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^3$ obtenu en appliquant le tenseur σ au vecteur $\vec{n}$. La relation exprime que tout vecteur $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$

unitaire e_r vecteur propre de σ et de valeur propre associée $-p$. La relation (6) en découle. $\square$

- Nous verrons que, si le fluide est animé d'une vitesse $\vec{u}$, la relation (6) doit être modifiée, ce qui fait apparaître la notion de viscosité.

- Théorème d'Archimède.

Archimède (−220) avait compris que tout corps plongé dans l'eau reçoit de la part de celle-ci une poussée dirigée vers le haut dont la valeur absolue est égale au poids du volume d'eau déplacé.

On introduit donc la gravité, le vecteur $\vec{g}$ qui dans un modèle simple de Terre plate, peut s'écrire

$$(7) \qquad \vec{g} = -g\,\vec{k}$$

avec $g = 9,81\ m/s^2$, et $\vec{k}$ direction verticale ascendante.

On écrit l'équilibre d'un volume Ω d'eau (ou d'air !) arbitraire qui est soumis à son poids et aux forces de pression.
Le poids est la somme de toutes les forces de gravité, pour une masse volumique ρ :

$$\overrightarrow{\text{poids}} = \int_\Omega \rho \vec{g}\, dx.$$

La somme des forces de pression est l'intégrale étendue à toute la frontière $\partial\Omega$ des forces infinitésimales de la relation (3). Leur résultante définit la "poussée d'Archimède"

$$(8). \quad \vec{A} = \int_{\partial\Omega} (-p)\vec{n}\, d\sigma$$

L'équilibre s'écrit

$$(9) \qquad -\int_{\partial\Omega} p\vec{n}\, d\sigma + \int_\Omega \rho\vec{g}\, dx = 0 \quad , \forall \Omega .$$

On transforme l'intégrale $\vec{A}$ en une intégrale de volume à l'aide d'une formule d'intégration par parties (Stokes) :

$$\vec{A} = -\int_\Omega \vec{\nabla} p\, dx$$

Alors la relation (9) s'écrit

$$(10) \quad \int_\Omega (-\vec{\nabla} p + \rho\vec{g})\, dx = 0 \quad , \forall \Omega .$$

Cette relation est vraie pour tout volume Ω donc le vecteur $-\vec{\nabla} p + \rho\vec{g}$ est identiquement nul ; c'est l'une des relations qui caractérise l'équilibre hydrostatique :

$$(11) \quad -\vec{\nabla} p + \rho\vec{g} = 0.$$

- La force $\vec{A}$ est dirigée vers le haut ($-\nabla p = -\rho\vec{g}$, avec $\vec{g}$ vers le bas) et son module vaut $|\vec{A}| = |\int_\Omega \rho\vec{g}\, dx| = mg$ où $m = \int_\Omega \rho dx$ est la masse du fluide contenue dans le volume Ω ; $|\vec{A}| = mg$, poids du volume de fluide correspondant. Dans l'air, la poussée d'Archimède est négligeable ; ce n'est plus le cas dans l'eau. Voilà pourquoi Archimède fit sa découverte dans son bain...

- <u>Calcul de la pression hydrostatique</u>.

Dans le cas où le champ de gravité $\vec{g}$ est donné par la relation (7), on peut intégrer la relation (11) sans difficulté, puisqu'on a

$$(12) \quad \vec{g} = \vec{\nabla}(-gz),$$

avec z pour désigner la cote, coordonnée cartésienne le long du vecteur $\vec{k}$.

Quand on injecte (12) dans (11), il vient

$\vec{\nabla}(p+\rho g z)=0$ (en supposant $\rho = c^{te}$, ce qui n'est pas toujours valide !)
Donc le champ scalaire est constant, et on peut écrire

$$(13) \qquad p = p_0 - \rho g z \, ,$$

où p_0 est la pression lorsque l'altitude z est nulle, la "pression atmosphérique".

- Blaise Pascal en 1648 a eu l'idée de mettre en évidence la différence de pression en passant de l'altitude $z=0$ à Clermont-Ferrand à $z=1465\,m$ en haut du Puy de Dôme. Expérience cruciale pour prouver l'existence même de la pression !

☐ Exercices.

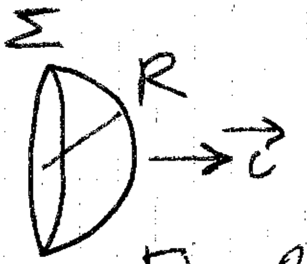

Fig. 2

- Hémisphères de Magdebourg. Montrer que l'intégrale des forces de pression sur une demi-sphère Σ de rayon R est donnée par $-p_0 \pi R^2 \vec{i}$, où p_0 est la pression atmosphérique. Que vaut cette force si $R = 1m$?
- Dans un cylindre en rotation autour d'un axe vertical, quelle est la forme de la surface

de séparation entre l'air et l'eau, qui est par construction même à la pression atmosphérique p_0 ? On pourra se placer dans le référentiel en rotation et introduire la force d'inertie $\vec{f_i} = \rho \omega^2 r \vec{e_r}$, avec $\vec{e_r} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et $z = z$.

Paris, 3 avril 2014

Dubois