

Introduction à la mécanique des fluides

Saint-Denis, printemps 2014

Cours 02

Théorèmes de Bernoulli

- Calcul de l'accélération
- Opérateur vitesse - gradient
- Cas d'un filet fluide stationnaire
- Cas d'un écoulement potentiel
- Perte de charge
- Tube de Pitot
- Forme conservative de la dynamique

François Dubois

Introduction à la Mécanique des Fluides (SDN2, CNAM Saint Denis)

② Théorèmes de Bernoulli

- Il convient d'écrire la loi fondamentale de la dynamique " $f = m\ddot{x}$ " dans un petit volume dx autour du point $x \in \mathbb{R}^3$ et à l'instant t . La force en a priori composée des éléments usés lors de la leçon 1, à savoir la gravité $\vec{p}g$ et le gradient de pression (ou plus exactement son opposé !) $-\vec{\nabla}p$. La force (infinitésimale) a donc pour expression

$$(1) \quad d\vec{f} = (\rho\vec{g} - \vec{\nabla}p) dx$$

La masse m est également infinitésimale. Elle est égale à la masse par unité de volume ρ (supposée constante dans tout ce chapitre), multipliée par le volume infinitésimal dx :

$$(2) \quad dm = \rho dx$$

- Le calcul de l'accélération demande un soin certain. Il y a deux points de vue pour décrire un fluide : le point de vue des trajectoires des particules (proposé par Lagrange)

et le point de vue de l'observateur extérieur qui observe le fluide (idée d'Euler).

* Dans le premier point de vue, la particule qui était en x_0 à l'instant initial se retrouve en

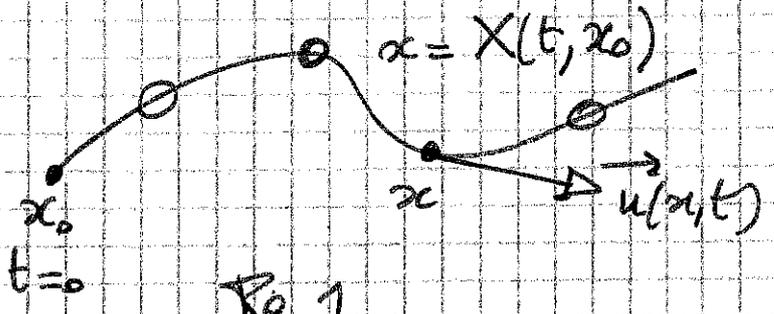


Fig. 1

$x = X(t, x_0)$ à l'instant (Fig. 1):

(3) $x = X(t, x_0)$; $X(t, x_0) = x_0$.

Le vecteur vitesse en ce point est la dérivée de la fonction du temps $t \mapsto X(t, x_0)$ [à x_0 fixé]. on a donc

(4) $\vec{u}(x, t) = \frac{\partial X}{\partial t}(t, x_0)$ avec $x = X(t, x_0)$.

La donnée du champ de vitesse $(x, t) \mapsto \vec{u}(x, t)$ en tout point de l'espace-temps caractérise le second point de vue, proposé par Euler.

* Si on se donne le point de vue de Lagrange (les trajectoires $t \mapsto X(t, x_0)$ pour tout x_0), le calcul du champ de vitesses d'Euler est facile avec la relation (4). Réciproquement, si on se donne le champ de vitesse $\vec{u}(x, t)$, on calcule la trajectoire en intégrant le

3
système d'équations différentielles

$$(5) \quad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(t, x_0) = \vec{u}(x(t, x_0), t), \quad t \geq 0$$

soumis à la condition initiale

$$(6) \quad x(0, x_0) = x_0.$$

La résolution de (5)/(6) est quasi impossible en général à l'aide de "formules", mais elle n'offre pas de difficulté du point de vue de l'analyse mathématique.

* La question est de calculer l'accélération γ .
Dans le point de vue de Lagrange, on dérive la relation (4) par rapport au temps :

$$(7) \quad \vec{\gamma} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2}(t, x_0).$$

Dans le point de vue d'Euler, le calcul (7) demande de dériver par rapport au temps la fonction $t \mapsto \vec{u}(x(t, x_0), t)$. Dans le cas d'une seule dimension d'espace, il vient facilement :

$$\frac{d}{dt} u(x(t, x_0), t) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Nous retenons

$$(8) \quad \gamma = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

* Dans le cas de trois dimensions d'espace, on écrit les 3 composantes de (5):

$$(9) \quad \frac{\partial x_i}{\partial t} = u_i(x_1(t, x_0), x_2(t, x_0), x_3(t, x_0), t), \quad i \leq 3$$

on dérive cette relation par rapport au temps. Il vient:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \\ &= u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} \end{aligned}$$

la relation (8) prend maintenant la forme

$$(10) \quad \gamma_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

* On voit apparaître dans ce calcul l'opérateur différentiel "le scalaire gradient" $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}$.

(11) opérateur $\vec{u} \cdot \vec{\nabla}$.

soit $\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto \vec{u}(x) \in \mathbb{R}^3$ un champ de vitesse et $\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}$ un champ scalaire dérivable. On pose

$$(11) \quad (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \varphi = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

En notation vectorielle, on a

$$(12) \quad \vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u},$$

avec bien entendu $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ qui se décompose sur une base orthonormée \vec{e}_i selon

$$(13) \quad (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \vec{e}_i$$

[attention aux places des indices i et j au membre de droite de la relation (13)!]

* La relation (12), jointe à (8), permet de définir une "dérivation covariante", ou "dérivation le long des trajectoires", ou "dérivée de Lagrange":

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}).$$

L'identité (14) entre opérateurs différentiels permet de "réduire" le calcul de l'accélération à la relation classique

$$(15) \quad \vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt}.$$

• on a tous les outils pour exprimer maintenant " $f = m\vec{\gamma}$ ". Compte tenu de (1)(2) et (12), il vient

$$(16) \quad p \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) + \vec{\nabla} p = p \vec{g}.$$

La relation (16) exprime le transfert d'impulsion (ou de quantité de mouvement) dans un fluide "parfait". on peut aussi réécrire (16) pour les 3 composantes :

$$(17) \quad \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) u_i \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

• Nous transformons la relation (16) à l'aide de l'identité vectorielle

$$(18) \quad (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} |\vec{u}|^2 \right) + (\text{rot } \vec{u}) \times \vec{u}$$

Au second membre de (18), on a

$$(19) \quad |\vec{u}|^2 = \sum_{j=1}^3 u_j^2$$

$$(20) \quad (\text{rot } \vec{u})_j = \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_k} u_l$$

□ Pour prouver (18), on regarde la i^{e} composante du vecteur $(\text{rot } \vec{u}) \times \vec{u}$, on a

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{u} \times \vec{u})_i &= \sum_{j,m} \epsilon_{ijm} (\text{rot } \vec{u})_j u_m \\ &= \sum_{j,k,l,m} \epsilon_{ijm} \epsilon_{jkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} u_m \\ &= \sum_{j,k,l,m} \epsilon_{jmi} \epsilon_{jkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} u_m \\ &= \sum_{j,k,l,m} \left[\delta_{mk} \delta_{il} - \delta_{ml} \delta_{ik} \right] \frac{\partial u_l}{\partial x_k} u_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_k - \sum_l \frac{\partial u_l}{\partial x_i} u_l \\
&= \sum_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i - \sum_k u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\
&= (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i - \sum_k \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_k^2) \\
&= (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_k u_k^2 \right] \\
&= (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\vec{u}|^2) \quad [\text{cf (19)}] \\
&= \left((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \frac{1}{2} \nabla (|\vec{u}|^2) \right)_i
\end{aligned}$$

et l'égalité (18) est établie composante par composante.

- Dans le cas du champ de pesanteur en terre plate, on peut écrire (16) à l'aide de (18) et de

$$(21) \quad \vec{g} = \vec{\nabla}(-gz), \quad g > 0$$

Il vient alors

$$(22) \quad \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 + p + \rho g z \right] + \rho \vec{\omega} \times \vec{u} = 0$$

La relation (22) permet d'écrire facilement les deux théorèmes de Bernoulli.

th1 Bernoulli pour un filet fluide stationnaire 8

on suppose l'écoulement stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$).
on s'intéresse au "filet fluide" (à la trajectoire $t \mapsto x(t, x_0)$) qui est en x_0 à l'instant $t=0$. Alors la "charge"

$$(23) \quad \Gamma \equiv \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 + p + \rho g z$$

ne dépend que du filet fluide (et pas de la position du point x sur cette trajectoire):

$$(24) \quad \Gamma = \Gamma(x_0).$$

• Preuve

on dérive Γ le long de la trajectoire, en adoptant le point de vue de Lagrange:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \Gamma = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \Gamma \quad \text{car } \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 + p + \rho g z \right]$$

$$= \vec{u} \cdot \left\{ \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \rho (\text{rot } \vec{u}) \times \vec{u} \right\}$$

$$= -\rho \text{rot } \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{u}) = 0$$

Donc Γ est constant le long d'une trajectoire telle que celle représentée Fig. 1. Mais cette constante dépend aussi de la trajectoire, et du point x_0 de référence. D'où (24) \square

Th. 2 Bernoulli pour un écoulement potentiel.

9

on suppose que le champ de vitesse $\vec{u}(x,t)$ dérive d'un potentiel $\varphi(x,t)$:

$$(25) \quad \vec{u}(x,t) = \vec{\nabla} \varphi(x,t).$$

Alors le charge

$$(26) \quad \tilde{T} \equiv \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 + p + \rho g z$$

ne dépend pas du point x de l'espace, mais peut varier globalement au cours du temps:

$$(27) \quad \tilde{T} = \tilde{T}(t).$$

en note que ces deux théorèmes de Bernoulli se complètent et expriment des réalités sous des hypothèses différentes: écoulement stationnaire dans le premier cas, avec conclusion limitée à une trajectoire ou écoulement potentiel instationnaire dans le second cas, avec conclusion étendue à l'espace complet. Surtout, dans le cas le plus général (écoulement instationnaire et tourbillonnaire) le "théorème de Bernoulli ne s'applique pas!"

on sait que l'hypothèse (25) entraîne $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, ce qui fait disparaître le dernier terme de (22). Pour le premier, on a (avec $\rho \equiv \text{cte}$):

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \phi) = \nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

Donc la relation (22) prend maintenant la forme

$$(28) \quad \nabla \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho |\vec{u}|^2 + p + \rho g z \right) = 0$$

La fonction $\tilde{\Gamma}$, fonction a priori de l'espace et du temps a un gradient spatial qui est nul. Donc elle ne dépend pas de l'espace mais uniquement du temps. Ce qu'exprime la relation (27). Le théorème est établi. \square

- Application à la vitesse de vidange d'un réservoir. on s'intéresse à la configuration décrite figure 2, on néglige la variation de la pression atmosphérique entre le haut du réservoir (à une altitude h) et le sol. on néglige aussi la vitesse de l'écoulement au sommet de la surface libre qui sépare l'air et le fluide

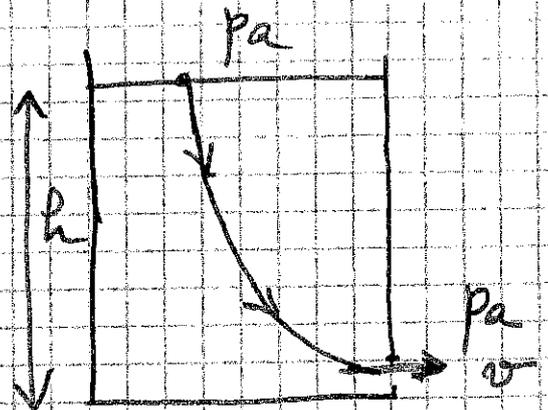


Fig 2

en haut du réservoir. Le théorème de Bernoulli s'écrit,

$$0 + \rho gh + p_a = \frac{1}{2} \rho v^2 + 0 + p_a,$$

d'où (28) $v = \sqrt{2gh}$

- Tube de Pitot. Ce dispositif proposé par Henry Pitot en 1732 a ensuite été amélioré par Henry Darcy (1803-1858)

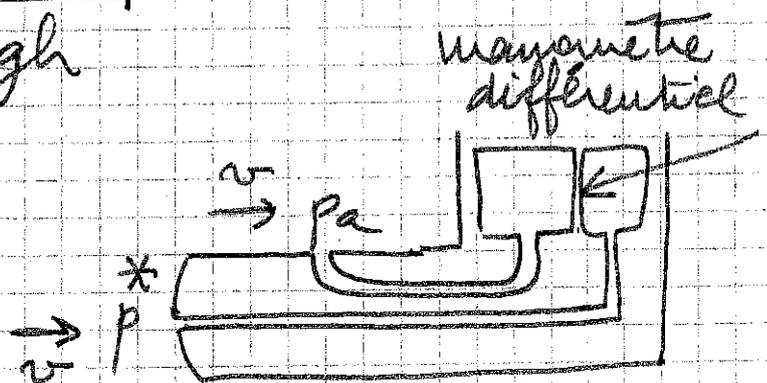


Fig 3. Tube de Pitot.

puis Ludwig Prandtl (1875-1953). Il permet la mesure de vitesse grâce à une double mesure de la pression. Il équipe la plupart des engins volants. On mesure d'une part la pression (statique) p_a sans perturber l'écoulement et d'autre part la pression d'arrêt p^* obtenue en arrêtant l'écoulement (Fig 3). Plus précisément, on mesure la différence de pression $p^* - p_a$ à l'aide d'un manomètre différentiel. En négligeant la variation d'altitude entre les diverses parties du tube de Pitot, la relation de Bernoulli s'écrit

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p_a = 0 + p^*$$

D'où

$$(29) \quad v = \sqrt{\frac{2(p^* - p_a)}{\rho}}$$

- La notion de perte de charge a prouvé en quoi un écoulement réel ne satisfait pas aux conclusions du théorème de Bernoulli. Pour un écoulement qui va du point A au point B, on écrit ^(stationnaire) typiquement

$$(30) \quad \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g h \right)_A = \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g h \right)_B + \Delta H$$

La grandeur ΔH est positive; c'est la perte de charge entre les points A et B. On l'exprime en se référant à la vitesse au point aval B:

$$(31) \quad \Delta H = \lambda \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right)_B$$

où λ est un coefficient sans dimension, dit "coefficient de perte de charge". Le calcul pratique des pertes de charges définit l'art de l'ingénieur hydraulicien. Il repose sur les principes généraux de lois de conservation d'une part et sur des lois empiriques d'autre part, souvent synthétisées à l'aide d'abaques.

- Nous terminons ce chapitre relatif aux théorèmes de Bernoulli par la forme intégrale des équations de conservation de l'impulsion.

(H3) Forme conservative de la dynamique

ou admet (pour le moment) que pour un écoulement incompressible ($\rho = \text{constante}$), le champ de vitesses $\vec{u}(x,t)$ vérifie toujours

$$(32) \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0.$$

Alors l'équation de conservation de la quantité de mouvement (16) (ou (17)) peut s'écrire "sous forme conservative"

$$(33) \quad \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (\rho u_j u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Pour un domaine arbitraire $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, on a toujours (avec \vec{n} normale extérieure) :

$$(34) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} dx + \int_{\partial \Omega} \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\sigma + \int_{\partial \Omega} p \vec{n} d\sigma = \int_{\Omega} \rho \vec{g} dx$$

(R) on démontrera plus tard que la relation (34) est valable pour tout fluide parfait ($\sigma = -p \operatorname{Id}$), sans utiliser l'hypothèse d'incompressibilité (32).

• Preuve

Si $\rho = \text{cte}$, on a bien entendu $\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t}$ et les deux premiers termes de (17) et (33) coïncident ou à grâce à la règle de dérivation d'un produit

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) &= \rho \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) \\ &= \rho \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j + \rho \sum_j u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\ &= \rho \left(\sum_j u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) u_i + \rho u_i \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\ &= \rho (\vec{u} \cdot \nabla) u_i + \rho u_i \operatorname{div} \vec{u} \\ &= \rho (\vec{u} \cdot \nabla) u_i \quad \text{si (32) a lieu.} \end{aligned}$$

Donc les deux termes suivants de (17) et (33) sont égaux. La relation (33) est donc alors clairement une conséquence de la relation (17).

- on intègre la relation (33) dans un domaine Ω de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$ régulière avec une normale extérieure \vec{n} . On sait que de façon très générale,

$$(35) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi \, dx = \int_{\partial\Omega} \varphi n_j \, d\sigma, \quad 1 \leq j \leq 3$$

et en choisissant $\varphi = \rho u_i u_j$ puis $j = i$ et $\varphi = p$, 15
 on tire de (33) par intégration dans Ω :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho u_i + \int_{\partial\Omega} \rho u_i \left(\sum_j u_j n_j \right) d\sigma + \int_{\partial\Omega} p n_i d\sigma = \int_{\Omega} \rho g_i dx$$

Comme

$$(36) \quad \sum_j u_j n_j = \vec{u} \cdot \vec{n},$$

la relation précédente peut s'écrire également:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) dx + \int_{\partial\Omega} \rho u_i (\vec{u} \cdot \vec{n}) d\sigma + \int_{\partial\Omega} p n_i d\sigma = \int_{\Omega} \rho g_i dx$$

Cette dernière relation exprime exactement la
 i^o composante de la relation (34), ce qui éta-
 blit la propriété. □

Exercices

• Tube de Venturi

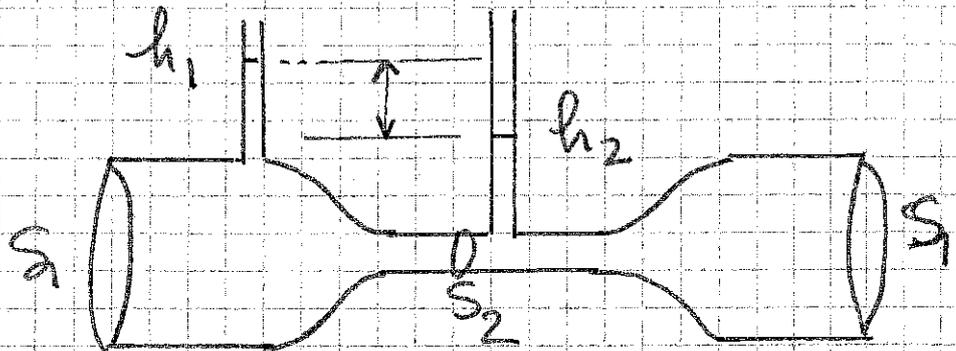


Fig. 4. Tube de Venturi

En régime permanent, on constate que la pression
 p_1 sur une même section est la pression p_2 dans la petite
 section $S_2 < S_1$. A l'aide du théorème de
 Bernoulli et de la conservation du débit, mon-
 trer que

$$(37) \quad p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right)$$

- Perte de charge inégale dans un tuyau qui s'évase.

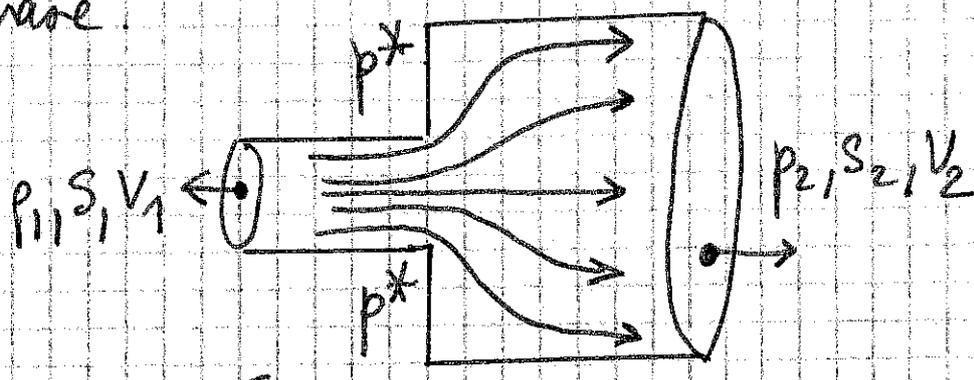


Fig. 5

Écoulement stationnaire dans la configuration de la Fig. 5. on définit la perte de charge H par

$$(38) \quad \frac{1}{2} \rho V_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho V_2^2 + p_2 + H$$

- Rappeler la relation qui exprime la conservation du débit
- Montrer que la forme intégrale de la conservation de l'impulsion (34) peut s'écrire

$$(39) \quad \rho S_2 V_2^2 - \rho S_1 V_1^2 + p_2 S_2 - p^* (S_2 - S_1) - p_1 S_1 = 0$$

- ou admettre que $p^* = p_1$ en une bonne approximation de l'écoulement réel. À l'aide du théorème de Bernoulli et des questions précédentes, montrer qu'on a

$$(40) \quad H = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \left(\frac{1}{2} \rho V_2^2 \right)$$

J. J. J.

Paris, 14 avril 2014.