



Introduction à la mécanique des fluides

Saint-Denis, printemps 2014

Cours 03

Viscosité

- Expérience de Couette
- Fluide newtonien
- Equations de Navier Stokes
- Ecoulement de Poiseuille
- Perte de charge linéique
- Transition vers la turbulence

François Dubois

Introduction à la Mécanique des Fluides (STN 2, CNAM Saint Denis)

③ Viscosité

- Au chapitre 1, nous avons étudié l'hydrostatique, c'est à dire un fluide de vitesse nulle. Nous avons mis en évidence un tenseur des contraintes σ pour décrire les efforts intérieurs. On a dans ce cas

$$(1) \quad \sigma = -p \text{ Id}$$

où p est la pression dans le fluide. Au chapitre 2, nous avons conservé l'hypothèse (1) et introduit un champ de vitesse $\vec{u}(x,t)$

Alors le principe fondamental de la dynamique prend la forme des équations d'Euler

$$(2) \quad \rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] + \nabla p = \vec{f}$$

où \vec{f} est une force volumique, $\vec{f} = \rho \vec{g}$ pour le champ de gravité typiquement.

- on s'intéresse à l'expérience de Couette : le fluide est enfermé entre deux plaques ; la plaque inférieure est animée d'une vitesse nulle et la plaque supérieure d'une vitesse \vec{V} . Quel est l'étalement entre les plaques (Fig. 1) ?

* Si on cherche le champ de vitesse \vec{u} sous la forme

$$(3) \vec{u} = (u(y), 0),$$

c'est à dire $u_x = u(y)$, $u_y = 0$, alors ce champ satisfait aux équations d'Euler (2) en absence de force extérieures et avec une pression constante. En effet, on a

$$(4) \vec{u} \cdot \nabla \equiv u(y) \frac{\partial}{\partial x}$$

donc $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = 0$ et $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ si \vec{u} est donné par la relation (3). Le fluide parfait (équation (2) et tenseur des contraintes σ donné par (1)) ne prend pas en compte les conditions aux limites de l'écoulement:

$$(5) u(0) = 0, u(h) = V.$$

• d'existence de la viscosité, du frottement fluide, impose qu'au bord, les conditions aux limites telles que (5) doivent être vérifiées; la vitesse d'un fluide réel doit être au bord exactement égale à la vitesse donnée par le solide.

$$(6) \vec{u}_{\text{fluide}} = \vec{u}_{\text{paroi}} \text{ au bord}$$

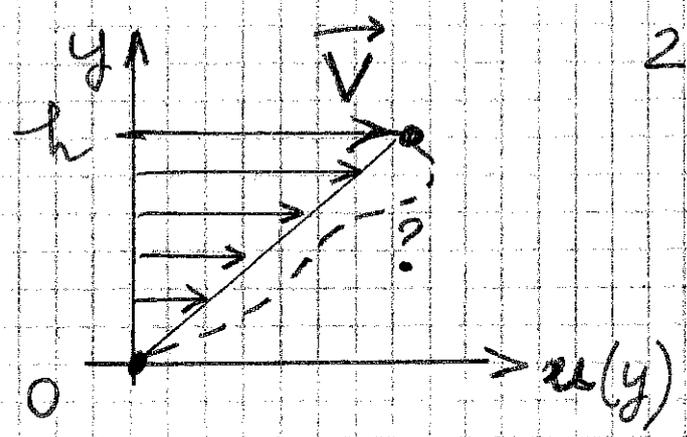


Fig 1. Ecoulement de Couette

• Quel est le flst $u(y)$ pour un problème de Couette qui satisfait aux conditions aux limites (5)? Toute fonction $u(y)$ telle que (5) (tel. le la ligne pointillée Figure 1) est solution des équations (2). Il convient donc de modifier le tenseur des contraintes (1) afin d'introduire les effets visqueux. On pose donc

$$(7) \quad \sigma = -p \text{Id} + \tau.$$

Le tenseur des tensions visqueuses τ est une fonction linéaire du gradient du champ de vitesses pour un fluide Newtonien; on a donc une relation du type

$$(8) \quad \tau_{ij} = \sum_{k,l} A_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

L'indice i ou j varie de 1 à 3; idem pour les indices k et l . On doit donc à priori déterminer $3^4 = 81(!)$ coefficients A_{ijkl} . Les propriétés d'invariance par rotation (non détaillées dans ce cours d'introduction) et de symétrie permettent de réduire (8) à

$$(9) \quad \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

le coefficient $\mu > 0$ s'appelle la viscosité du fluide.

- Comment étudier l'équation d'Euler (2) pour prendre en compte un tenseur des contraintes (7)(9)? on remarque que avec (1) et (2), la relation (2) peut s'écrire

$$(10) \quad \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i \right) - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = f_i, \quad 1 \leq i \leq 3$$

puis que $\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [-p \delta_{ij}] = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$ on montre que l'équation (10) s'étend au cas du modèle visqueux (7). On a alors

$$\begin{aligned} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} &= - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \mu \sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \Delta u_i - \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \Delta u_i - \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{u}) \end{aligned}$$

Nous retenons :

$$(11) \quad - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \Delta u_i - \mu \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{u}), \quad 1 \leq i \leq 3$$

- Compte tenu de (11), la conservation de l'impulsion (10) s'écrit dans le cas d'un fluide visqueux Newtonien [tenseurs visqueux τ données par la relation (9)] :

$$(12) \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) + \nabla p - \mu \Delta \vec{u} - \mu \nabla (\operatorname{div} \vec{u}) = \vec{f},$$

ce sont les équations de Navier-Stokes.

- Avec les conditions limites (5) et un champ de vitesse colinéaire à \vec{Ox} (3), on a $\operatorname{div} \vec{u} = 0$, $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = 0$; donc les équations de Navier-Stokes (12) s'écrivent simplement

$$(13) \quad \nabla p - \mu \Delta \vec{u} = 0$$

Avec $p = \text{cste}$, $\Delta u_x = \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$ et u est une fonction affine de dy^2 la variable y .
Compte tenu de (5), on en déduit

$$(14) \quad u(y) = \frac{y}{h} v, \quad 0 \leq y \leq h.$$

C'est le profil linéaire de la figure 1 qui est effectivement solution du problème de Couette.

- Un autre problème classique qui est possible de résoudre analytiquement est proposé par Poiseuille.

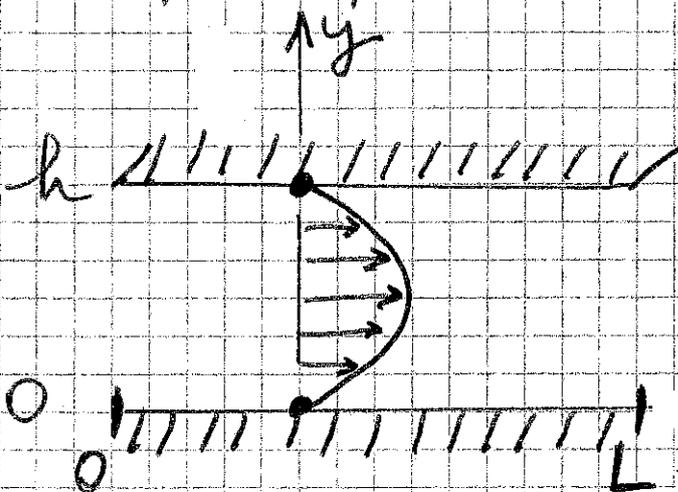


Fig. 2

Écoulement de Poiseuille

C'est un écoulement stationnaire unidirectionnel selon Ox , avec une différence de pression Δp satisfaisant à

$$(15) \quad \Delta p \equiv p(0) - p(L) > 0$$

entre les abscisses $x=0$ et $x=L$. On cherche un champ $\vec{u} = (u(y), 0)$ comme à la relation (3). On a alors $\text{div } \vec{u} = 0$ et (4), donc $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{0}$. Ici encore, les équations de Navier Stokes (12) se réduisent à (13), soit pour $u(y)$ au problème

$$(16) \quad \begin{cases} -\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L}, & 0 \leq x \leq L \\ u(0) = u(h) = 0. \end{cases}$$

• Une solution de (16) peut s'écrire

$$(17) \quad u(y) = \frac{V}{h^2} y(h-y).$$

Alors $\Delta u = \frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{2V}{h^2}$ et l'échelle de vitesse V est reliée au gradient de pression (supposé constant le long de x) par la relation

$$(18) \quad \Delta p = 2 \frac{\mu V L}{h^2}.$$

En fait, c'est la vitesse moyenne $U \equiv \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy$ qui est utilisée en pratique; on a

$$U = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{V}{h^3} \int_0^h y(h-y) dy$$

$$= \frac{V}{h^3} \left[h \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} \right] = \frac{V}{6}$$

La relation (18) peut aussi s'écrire

$$(19) \quad \Delta p = 12 \frac{\mu U L}{h^2}$$

- Pour ce problème, Δp mesure la perte de charge $(p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z)_0 - (p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho g z)_h$ puisque la vitesse est toujours la même quel que soit z et que le tube est horizontal. Il est habituel d'introduire le coefficient λ de perte de charge, avec la convention :

$$(20) \quad \Delta p \equiv \lambda \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right)$$

Alors, en introduisant le nombre de Reynolds Re relatif à la hauteur h du canal, c'est à dire

$$(21) \quad Re \equiv \frac{\rho U h}{\mu},$$

on a le calcul suivant

$$\Delta p = 12 \frac{\mu U L}{h^2} \cdot \frac{2}{\rho U^2} \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right)$$

$$= 24 \frac{\mu}{\rho U h} \frac{L}{h} \cdot \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) = \frac{24}{Re} \frac{L}{h} \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right)$$

qui montre que

$$(22) \quad \lambda = \frac{24}{Re} \frac{L}{h}$$

La perte de charge est proportionnelle à la longueur du tuyau (on parle alors de perte de charge régulière), inversement proportionnelle à la largeur du canal et également inversement proportionnelle au nombre de Reynolds Re défini à la relation (21).

- Si $Re \leq 2400$, la solution précédente, stationnaire, sans vitesse verticale, laminaire, est effectivement observée dans la Nature. Au delà, la solution stationnaire de Poiseuille devient instable ; l'écoulement devient instationnaire, périodique pour $Re \leq 5000$ typiquement, puis aperiodique ensuite. on parle alors d'un écoulement Turbulent.

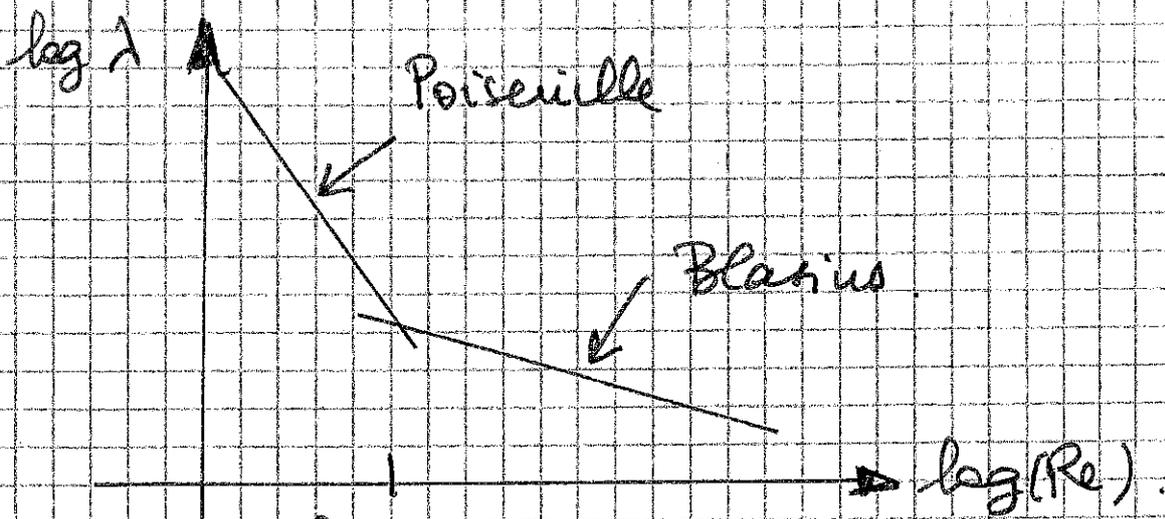


Fig. 3

Dans le cas où les parois du tube sont lisses, la perte de charge de Poiseuille (22) [ou approchant!] laisse la place à une relation bien approchée par la loi de Blasius:

$$(23) \quad \lambda = \frac{0,316}{4\sqrt{Re}} \frac{L}{h}$$

ainsi qu'illustré Figure 3 dans un diagramme "log-log". La compréhension de la turbulence reste un sujet de travail actif pour la communauté scientifique. Sujet difficile puisque les besoins de simulation directe dépassent à ce jour largement la puissance calcul des ordinateurs les plus performants de cette planète.

• Exercice

Dans le cas d'un tuyau cylindrique de diamètre D , montrer qu'un champ de vitesse de la forme $\vec{u} = v(r) \vec{e}_x$ est solution de (12) avec les conditions $v(D/2) = 0$, où r est la distance au centre du tube en admettant que $\frac{dp}{dx} = \text{cte}$ et on pourra utiliser la relation:

$$(24) \quad \Delta \varphi(r, \theta, x) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

Montrer que la perte de charge λ telle que (20) a lieu peut s'écrire (25) $\lambda = \frac{64}{Re} \frac{L}{D}$, où $Re = \frac{\rho v D}{\mu}$.

Jules's Paris, 18 avril 2014.