COURS 1-BIS

Formule de Taylor

François Dubois, janvier 2005, édition 03 août 2006, 6 pages.

IACS, 2004-2005

Mémo. Formule de Taylor

- Dans cette note, la lettre h désigne une variable "petite", appartenant à un "voisinage de zéro", c'est à dire en pratique à un intervalle de la forme $]-\eta, \eta[$, où η est un nombre strictement positif fixé.

(1) $\exists \eta > 0, \quad h \in \,]-\eta, \eta[$.

- On désigne par p un réel ≥ 0, souvent entier. On dit qu'un "infiniment petit", c'est à dire une fonction $\varphi :]-h, h[\to \mathbb{R}$ est un "petit o de h^p" et on écrit

(2) $\quad \varphi = o(h^p)$

si il existe une fonction $\varepsilon :]-\eta, \eta[\to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(h)$ tend vers zéro si h tend vers zéro et $\varphi(h)$ est le produit de h^p par $\varepsilon(h)$:

(3) $\quad \varphi(h) = h^p \varepsilon(h), \ \forall h \in \,]-\eta, \eta[\, ; \ \varepsilon(h) \to 0$ si $h \to 0$.

- On dit que $\varphi :]-\eta, \eta[\to \mathbb{R}$ est un "grand O de h^p" et on écrit

(4) $\quad \varphi = O(h^p)$

si il existe une constante C indépendante de h de sorte que

(5) $\quad |\varphi(h)| \leq C \, h^p, \quad \forall h \in \,]-\eta, \eta[$.

- Si $\varphi = o(h^r)$, alors $\varphi = O(h^r)$ car la fonction ε tendant vers 0 est nécessairement bornée au voisinage de 0 (quitte en toute rigueur à réduire un peu η) :

$$(6) \quad \exists C > 0, \forall h \in \left]-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}\right[, \quad |\varepsilon(h)| \leq C .$$

On tire alors de (3) et (6) la relation (5), à ceci près que η est remplacé par $\eta/2$... Nous n'insistons pas ici sur ce point technique sans effet direct ; ce qui importe est l'existence de $\eta > 0$ de sorte que (3) ou (5) aient lieu.

- Nous abordons maintenant l'étude de la formule de Taylor. Nous fixons $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continûment k fois dérivable (ce ne sont pas les hypothèses les plus générales, mais ce sont les plus simples pour mener à bien le calcul qui suit), avec k nombre entier assez grand. On sait qu'alors (c'est un résultat général qu'une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est toujours bornée sur $[a, b]$, si a et b sont effectivement des nombres réels) la dérivée d'ordre k de f est bornée sur l'intervalle $[a, b]$:

$$(7) \quad \exists C_k > 0, \forall y \in [a, b], \ |f^{(k)}(y)| \leq C_k .$$

L'hypothèse "f continûment dérivable sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre k" s'écrit $f \in \mathcal{C}^k([a, b], \mathbb{R})$.

- Nous allons établir par récurrence la formule de Taylor dite "avec reste intégral". Nous fixons $x \in]a,b[$ de sorte qu'il existe $\eta > 0$ tel que l'intervalle $[x-\eta, x+\eta]$ reste toujours inclus dans $[a,b]$:

(8) $\eta > 0$ tel que $[x-\eta, x+\eta] \subset [a,b]$.

En pratique, $\eta = \inf(x-a, b-x)$, mais c'est sans utilité pour ce qui suit.

- La plus simple des formules de Taylor consiste en une simple intégration :

$$f(x+h) = f(x) + \int_x^{x+h} f'(y)\, dy.$$

$$= f(x) + \int_0^h f'(x+\theta)\, d\theta$$

(9) $f(x+h) = f(x) + h \int_0^1 f'(x+th)\, dt$

après les changements de variable $x+\theta = y$ et $\theta = th$. Nous utilisons la relation (7) avec $k=1$; il vient

(10) $\left| \int_0^1 f'(x+th)\, dt \right| \leq C_1$

et compte tenu de (10), la relation (9) peut encore s'écrire

(11) $f(x+h) = f(x) + O(h)$, $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$

Ce n'est pas spectaculaire, mais c'est déjà une formule de Taylor ! La relation (9) est dite "avec reste intégral", c'est une égalité qui précise la valeur du reste, écrit symboliquement comme un "grand O" à la relation (11) suite à la majoration (10).

- Nous poursuivons en intégrant par parties l'intégrale $\int_0^1 f'(x+th)\,dt$ présente à la relation (9). Nous avons

$$(12) \quad \frac{d}{dt}\Big[(1-t)f'(x+th)\Big] = -f'(x+th) + h(1-t)f''(x+th)$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 f'(x+th)\,dt = -\Big[(1-t)f'(x+th)\Big]_0^1 + h\int_0^1 (1-t)f''(x+th)\,dt$

après intégration de la relation (12) sur l'intervalle $[0,1]$ de variation de la variable t. on a

$$-\Big[(1-t)\,f'(x+th)\Big]_{t=0}^{t=1} = -\big(0 - f'(x)\big) = f'(x).$$

on tire donc des calculs précédents

$$(13) \quad \int_0^1 f'(x+th)\,dt = f'(x) + h\int_0^1 (1-t)f''(x+th)\,dt$$

et en reportant cette relation dans la relation (9), il vient

$$(14) \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2\int_0^1 (1-t)f''(x+th)\,dt.$$

Cette formule de Taylor, "à l'ordre 1" fait apparaître un reste en $O(h^2)$ grâce à la majoration

$$(15) \quad \Big|\int_0^1 (1-t)\,f''(x+th)\,dt\Big| \leqslant C_2\int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}C_2.$$

On a donc

$$(16) \quad f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + O(h^2), \quad f\in\mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R}).$$

- On établit par récurrence la relation

$$(17)\quad f(x+h) = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x) + \frac{h^{p+1}}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(x+th)\,dt$$

qui est la formule de Taylor à l'ordre p, "avec reste intégral", valable dès que f est $(p+1)$ fois continûment dérivable, c'est à dire $f \in \mathcal{C}^{p+1}([a,b],\mathbb{R})$. La relation (17) est vraie pour $p=0$ (c'est la relation (9)) et elle est encore vraie pour $p=1$ (c'est alors la relation (16)). Pour achever la preuve, on montre qu'on peut la pousser "un cran plus loin", si f est dérivable "une fois de plus". Il suffit pour cela d'intégrer par parties l'intégrale au membre de droite de la relation (17) :

$$(18)\quad \frac{d}{dt}\left[\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1} f^{(p+1)}(x+th)\right] = -(1-t)^p f^{(p+1)}(x+th) + \frac{h}{p+1}(1-t)^{p+1} f^{(p+2)}(x+th)$$

donc

$$\int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(x+th)\,dt = -\left[\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1} f^{(p+1)}(x+th)\right]_0^1 + \frac{h}{p+1}\int_0^1 (1-t)^{p+1} f^{(p+2)}(x+th)\,dt$$

Comme $\left[\frac{(1-t)^{p+1}}{p+1} f^{(p+1)}(x+th)\right]_0^1 = 0 - \frac{1}{p+1} f^{(p+1)}(x)$,

quand on reporte cette valeur dans l'expression précédente, il vient

$$(19)\quad \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(x+th)\,dt = \frac{1}{p+1} f^{(p+1)}(x) + \frac{h}{p+1}\int_0^1 (1-t)^{p+1} f^{(p+2)}(x+th)\,dt$$

On remplace l'intégrale au membre de droite de (17) par l'expression tirée de (19). Il vient :

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x) + \frac{h^{p+1}}{p!}\left[\frac{1}{p+1} f^{(p+1)}(x) + \frac{h}{p+1}\int_0^1 (1-t)^{p+1} f^{(p+2)}(x+th)\,dt\right.$$

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(x) + \frac{h^{p+2}}{(p+1)!}\int_0^1 (1-t)^{p+1} f^{(p+2)}(x+th)\,dt$$

ce qui établit une nouvelle forme de l'identité (17), à ceci près que p a été remplacé par $p+1$. Ceci achève la preuve par récurrence de la relation (17)

- A partir de la relation (17) et de l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^{(p+1)}([a,b], \mathbb{R})$, on peut à l'aide de (7)(avec $k = p+1$) majorer sans difficulté cette intégrale du reste. on a :

$$\left| \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(x+th)\,dt \right| \leqslant C_{p+1} \int_0^1 (1-t)^p\,dt = \frac{C_{p+1}}{p+1}$$

et il vient

$$(20) \quad \left| f(x+h) - \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x) \right| \leqslant \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} C_{p+1} \,,$$

relation qu'on peut écrire sous forme équivalente

$$(21) \quad f(x+h) = \sum_{j=0}^{p} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x) + O(h^{p+1}),\ f \in \mathcal{C}^{p+1}([a,b], \mathbb{R}).$$

C'est l'expression la plus utile de la formule de Taylor. Notez que cette relation n'a de sens que si f est suffisamment dérivable !

JS, janvier 2005.