Cours 7

Interpolation de Lagrange

François Dubois, novembre 2004, édition 03 août 2006, 10 pages.

IACS (7) Interpolation de Lagrange

(1) Interpolation affine

- On dispose de deux valeurs réelles $a \neq b$ et de deux valeurs (réelles pour fixer les idées) u et v. On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ les deux points (a,u) et (b,v) et on veut "faire passer une droite ~~entre~~ par deux points". De manière générale, l'idée d'une <u>interpolation</u> est de "faire passer une courbe par des valeurs données".
- Nous allons utiliser pour les calculs une propriété fondamentale des fonctions affines qui est de <u>conserver le barycentre</u>. Si a, b sont deux nombres donnés, le barycentre de a et b affectés des coefficients $(1-\theta)$ et θ est par définition le nombre $x(\theta)$ tel que

(1) $\quad x(\theta) = (1-\theta)\, a + \theta (b), \quad \theta \in \mathbb{R}$.

Une fonction affine f est de la forme

(2) $\quad f(x) = \alpha x + \beta, \quad x \in \mathbb{R}$.

On a alors

(3) $\quad f\big((1-\theta)\, a + \theta b\big) = (1-\theta)\, f(a) + \theta f(b), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$.

le barycentre des images par f est égal à l'image du barycentre.

- La preuve de la relation (3) est très simple :

$$
\begin{aligned}
f((1-\theta)a+\theta b) &= f(x(\theta)) = \alpha x(\theta)+\beta \\
&= \alpha\left[(1-\theta)a+\theta b\right]+\beta\left[(1-\theta)\times 1+\theta\times 1\right] \\
&= (1-\theta)(\alpha a+\beta)+\theta(\alpha b+\beta) \\
&= (1-\theta)\, f(a)+\theta\, f(b) \qquad \square
\end{aligned}
$$

- Si on cherche absolument à expliciter les coefficients α, β de la fonction affine f qui vérifie

(4) $\quad f(a) = u, \quad f(b) = v,$

il suffit d'utiliser la relation (3), en explicitant θ à l'aide de la relation (1) :

$$\theta = \frac{x-a}{b-a},$$

$$f(x) = \left(1-\frac{x-a}{b-a}\right) u + \frac{x-a}{b-a}\, v,$$

(5) $$f(x) = \frac{b-x}{b-a}\, u + \frac{x-a}{b-a}\, v.$$

(2) Interpolation affine par morceaux

- Il s'agit de généraliser le paragraphe précédent au cas où l'on dispose de $(N+1)$ données $u_0, u_1, \dots, u_N$ pour les points $(x_j)_{0\le j\le N}$ tels que

(6) $$a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_N = b.$$

L'interpolation affine par morceaux consiste simplement à "tracer une ligne droite" entre chacun des points (x_j, u_j) et (x_{j+1}, u_{j+1}) (voir la Figure 1)

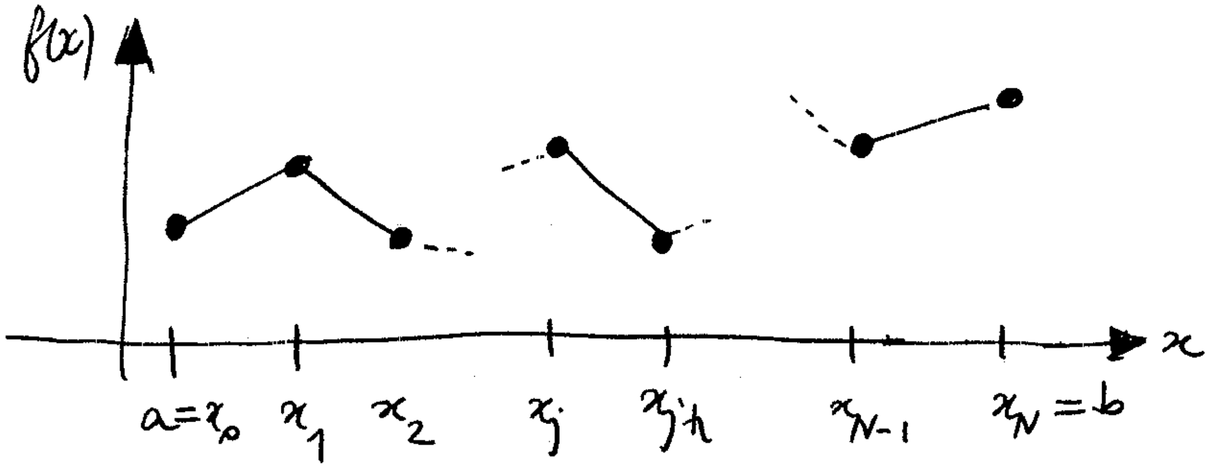

Figure ① Interpolation affine par morceaux

- Dans l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, la fonction f, interpolation des données $(x_k, u_k)_{0 \leq k \leq N}$ vérifie

(7) $f((1-\theta)x_j + \theta x_{j+1}) = (1-\theta)u_j + \theta u_{j+1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1$

La relation (7) exprime simplement qu'on utilise simplement les résultats du paragraphe précédent, avec a remplacé par x_j et b par x_{j+1}, avec $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Prop ① Fonctions de base de l'interpolation affine par morceaux

- Avec des points $(x_j)_{0 \leq j \leq N}$ donnés selon les conditions (6), il existe une seule fonction $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfaisant à

(8) φ_j continue $[a,b] \to \mathbb{R}$

(9) $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk}, \quad 0 \leq j \leq N, \; 0 \leq k \leq N.$

(10) φ_j affine sur $]x_k, x_{k+1}[, \; k = 0, \dots, N-1.$

- L'unique fonction f affine par morceaux sur $]x_k, x_{k+1}[$ $(0 \leq k \leq N-1)$ telle que

(11) $\quad f(x_j) = u_j \,, \quad 0 \leq j \leq N$

qui ~~est~~ satisfait en conséquence la relation (7) pour tout entier $j = 0, \ldots, N-1$, peut s'écrire sous la forme

(12) $\quad f = \sum_{j=0}^{N} u_j \, \varphi_j \,.$

On dit que les $(N+1)$ fonctions φ_j définies en (8)(9)(10) forment une <u>base</u> de l'espace de toutes les fonctions <u>affines</u> sur les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ et <u>continues</u> de $[a,b]$ à valeurs réelles.

<u>Preuve de la proposition 1</u>

- On construit d'abord une fonction φ_j qui vérifie (8)(9)(10), sachant que le symbole de Kronecker est nul si $j \neq k$ et vaut 1 si $j = k$:

(13) $\quad \delta_{jj} = 1 \,, \quad \delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$.

- La fonction φ_j est nulle sauf sur l'intervalle $[x_{j-1}, x_{j+1}]$, où elle vaut 1 en x_j. Elle est affine sur chacun des intervalles $[x_{j-1}, x_j]$ et $[x_j, x_{j+1}]$. On a alors sans difficulté

$$(14) \quad \varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \,, & x_{j-1} \leq x \leq x_j \\[2mm] \dfrac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \,, & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\[2mm] 0 & \text{si } x \leq x_{j-1} \text{ ou } x \geq x_{j+1} . \end{cases}$$

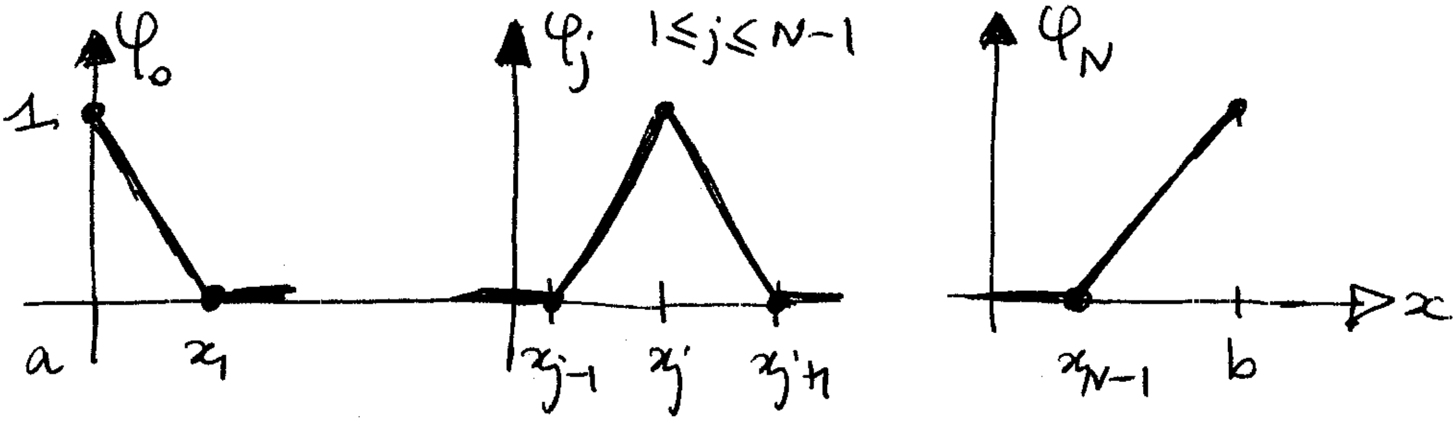

Figure (2) Représentation graphiques des fonctions de base "chapeau" φ_j, $0 \leq j \leq N$.

Les fonctions φ_j sont dites "fonctions chapeau" à cause de leur représentation graphique (voir la figure 2).

- On remarque ensuite que si f est nulle aux points x_j, c'est à dire si $u_0 = u_1 = \cdots = u_N = 0$, alors f est nulle, ie $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.
  Il suffit pour cela d'utiliser la relation (7) qui permet de calculer $f(x)$ pour $x_j < x < x_{j+1}$. Si $u_j = u_{j+1} = 0$, alors le membre de droite de la relation (7) est nul pour tout $\theta \in]0,1[$ et $f(x)$ est nul dans l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$. Ce raisonnement est valable pour toute valeur de j de 0 à $(N-1)$ et f est nulle dans tout l'intervalle $[a,b]$.
- On introduit la fonction g définie par

$$(15) \quad g(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{N} u_j \, \varphi_j(x), \quad a \leq x \leq b$$

La fonction g est somme de $(N+2)$ fonctions continues donc elle est continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs les $(N+2)$ fonctions $f, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ sont affines dans chaque intervalle $]x_j, x_{j+1}[$, donc il en est de même de la combinaison linéaire g définie par la relation (15). Enfin, $g(x_k)=0$ pour toute valeur de $k \in \{0, 1, \dots, N\}$. En effet,

$$g(x_k) = f(x_k) - \sum_{j=0}^{N} u_j \, \varphi_j(x_k)$$
$$= u_k - \sum_{j=0}^{N} u_j \, \delta_{jk} = u_k - u_k = 0$$

car un seul terme (le $k^{\text{ème}}$) est non nul dans la somme $\sum_{j=0}^{N} u_j \, \delta_{jk}$.

- La fonction g est donc nulle pour tous les points x_k $(0 \leq k \leq N)$. Elle est continue et affine sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. Elle est donc identiquement nulle compte tenu du troisième point de cette démonstration. Le membre de gauche de la relation (15) est donc toujours nul, ce qui établit la relation (12). $\square$

(3) Interpolation polynomiale de degré N.

- Le problème général de l'interpolation "entre" les points de données (x_j, u_j) $(0 \leq j \leq N)$ où les x_j vérifient (pour fixer les idées) la relation (6) a été résolu au paragraphe précédent à l'aide d'une fonction f continue mais non dérivable aux points "de grille" x_j, comme le montre clairement la figure 1. L'interpolation de Lagrange consiste à construire un polynome p_N de degré $\leq N$ de sorte que

(16) $\qquad p_N(x_j) = u_j \,, \quad 0 \leq j \leq N.$

- On construit d'abord des fonctions de base polynomiales $\varphi_{N,j}$ $(0 \leq j \leq N)$ qui vérifient la relation (9), mais les relations (8) et (10) sont remplacées par la condition que $\varphi_{N,j}$ est polynomiale de degré $\leq N$. Comme $\varphi_{N,j}$ doit s'annuler à tous les points x_k sauf x_j, il est naturel d'introduire le polynome

(17) $\quad g_j(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_N) \equiv \prod_{k\neq j}(x-x_k)$

où la notation $\prod_k$ désigne le produit, de même que $\sum_k$ désigne une somme. La fonction g_j est le produit de $(N+1)-1 = N$ fonctions affines $(x-x_k)$, donc c'est un polynome de degré $\leq N$. On a $g_j(x_0) = g_j(x_1) = \cdots = g_j(x_{j-1}) = g_j(x_{j+1}) = \cdots = g_j(x_N) = 0$ mais $g_j(x_j) \neq 0$ car la relation (6) a lieu. On obtient $\varphi_{N,j}$ en divisant g_j par $g_j(x_j)$:

(18) $$\varphi_{N,j}(x) = \frac{\prod_{0\leq k\leq N,\, k\neq j}(x-x_k)}{\prod_{0\leq k\leq N,\, k\neq j}(x_j-x_k)}\,.$$

- On a alors simplement

$$(19) \quad p_N = \sum_{j=0}^{N} u_j \, \varphi_{N,j}$$

pour construire un polynome p_N de degré $\leq N$ de sorte que la relation (16) a lieu. En effet, comme somme pondérée par les u_j de polynomes de degré $\leq N$, p_N défini en (19) est un polynome de degré inférieur ou égal à N. De plus si $0 \leq i \leq N$, on a $\varphi_j(x_i) = \delta_{ji}$ par construction - même de la relation (18) à partir de la relation (17). Si on calcule $p_N(x_i)$, tous les termes de la somme au membre de droite de la relation (19) sont nuls, excepté le i^{o} pour lequel $\varphi_i(x_i) = 1$. La relation (16) est bien vérifiée!

- Si p_N est un polynome de $d^{o} \leq N$ tel que

$$(20) \quad p_N(x_j) = 0, \quad \forall j \,/\, 0 \leq j \leq N,$$

ce polynome de degré $\leq N$ a $(N+1)$ racines distinctes compte tenu de la relation (6). Donc p_N est identiquement nul (penser au cas $N=1$, qui se généralise sans difficulté).

- Nous venons de montrer la

Prop 2 Interpolation de Lagrange

Il existe un unique polynome p_N de degré inférieur ou égal à N vérifiant (16). Il est donné par les relations (19) et (18).

(4) Interpolation de degré 2 sur une grille uniforme.

- on considère une grille de pas $\Delta x > 0$ et le cas particulier où les points x_j vérifient

(21) $\quad x_j = j\,\Delta x, \quad 0 \leq j \leq N.$

L'unique polynome de degré ≤ 2 qui vérifie

(22) $\quad p_2(x_{j-1}) = u_{j-1},\ p_2(x_j) = u_j,\ p_2(x_{j+1}) = u_{j+1}$

peut être calculé sans difficulté en fonction de u_{j-1}, u_j, u_{j+1}.

- on cherche p_2 comme polynome en $x - x_j$:

(23) $\quad p_2(x) = \alpha + \beta\,(x - x_j) + \dfrac{\gamma}{2}\,(x - x_j)^2$ (j fixé)

et on doit calculer les coefficients α, β, γ de façon à satisfaire les relations (22). On a donc

$$(24)\quad \begin{cases} \alpha - \beta\,\Delta x + \dfrac{\gamma}{2}\,\Delta x^2 = u_{j-1} \\ \alpha = u_j \\ \alpha + \beta\,\Delta x + \dfrac{\gamma}{2}\,\Delta x^2 = u_{j+1} \end{cases}$$

qui conduit à $\alpha = u_j$, $\gamma\,\Delta x^2 = u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}$, $2\beta\,\Delta x = u_{j+1} - u_{j-1}$. On remplace ces valeurs dans la relation (23) et il vient

$$(25)\quad p_2(x) = u_j + \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}(x - x_j) + \frac{1}{2}\,\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2}\,(x - x_j)^2$$

Le coefficient du terme de degré 1 est simplement la différence finie d'ordre 2 qui approche "$\dfrac{\partial u}{\partial x}$" et le coefficient de $(x-x_j)^2$ est (au coefficient $1/2$ près qui est un simple rappel de la formule de Taylor) est la différence finie d'ordre 2 qui approche $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. On renvoie le lecteur au chapitre 5 d'introduction aux différences finies.

FD, nov 04.