COURS 10

Splines cubiques

1) Position du problème
2) Interpolation polynomiale de degré trois
3) Raccord des dérivées secondes
4) Résolution d'un système linéaire tridiagonal
5) En guise de conclusion

François Dubois, décembre 2004, édition 03 août 2006, 12 pages.

IACS (10)

Splines cubiques

(1) Position du problème

- Soit $a<b$ deux nombres réels, N un nombre entier. On suppose l'intervalle $[a,b]$ découpé en N intervalles égaux (pour simplifier les calculs dans cet exposé élémentaire) ; on pose

(1) $\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$.

On note $x_0 = a < x_1 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_N = b$ les sommets correspondants à cette division

(2) $x_j = a + j\Delta x$; $x_{j+1} - x_j = \Delta x$.

- On se donne des valeurs nodales $u_0, \dots, u_N$ et on cherche $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois continuement dérivable, ce qu'on écrit symboliquement

(3) $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$

de sorte que les valeurs de la fonction $f(\cdot)$ sont données aux points de grille $(x_j)_{0 \le j \le N}$ par les valeurs nodales $(u_j)_{0 \le j \le N}$:

(4) $f(x_j) = u_j$, $0 \le j \le N$.

(2) Interpolation polynomiale de degré trois

- Afin de réaliser le programme précédent, qui comporte une infinité de fonctions $f(\cdot)$ répondant aux conditions (3) et (4), le choix des splines, dans l'approche élémentaire exposée ici, consiste à chercher f polynomiale de degré 3 dans chaque intervalle de la forme $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq N-1$. La condition d'être de classe $\mathcal{C}^2$ consiste à "recoller" la fonction f ainsi que ses deux premières dérivées aux points x_j de la grille

$$(5) \qquad \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[f^{(k)}(x_j + \varepsilon) - f^{(k)}(x_j - \varepsilon) \right] = 0$$
$$1 \leq j \leq N-1, \quad k = 0, 1, 2.$$

- on décide ensuite d'utiliser la base d'interpolation de Hermite introduite au chapitre 8. On pose

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(\theta) = (\theta - 1)^2 (1 + 2\theta) \\ \varphi_2(\theta) = \theta^2 (3 - 2\theta) \\ \varphi_3(\theta) = \theta (\theta - 1)^2 \\ \varphi_4(\theta) = (\theta - 1)\, \theta^2 \end{array} \right. , \qquad 0 \leq \theta \leq 1$$

et on a le tableau suivant qui relie les fonctions de base $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq 4}$ et les "degrés de liberté" $(\sigma_k)_{1 \leq k \leq 4}$ définis par

$$(7) \quad \sigma_1(\varphi) = \varphi(0), \ \sigma_2(\varphi) = \varphi(1), \ \sigma_3(\varphi) = \varphi'(0), \ \sigma_4(\varphi) = \varphi'(1),$$
$$\varphi \text{ dérivable } [0,1] \to \mathbb{R}.$$

$\sigma \backslash \varphi$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$\sigma_1(\varphi) \equiv \varphi(0)$	1	0	0	0
$\sigma_2(\varphi) \equiv \varphi(1)$	0	1	0	0
$\sigma_3(\varphi) \equiv \varphi'(0)$	0	0	1	0
$\sigma_4(\varphi) \equiv \varphi'(1)$	0	0	0	1

<u>Tableau I</u> Relations entre les fonctions de base $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq 4}$ et les degrés de liberté $(\sigma_k)_{1 \leq k \leq 4}$

Si on introduit le <u>symbole de Kronecker</u> δ_{kj} par la relation

(8) $$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases},$$

on a tout simplement

(9) $$\sigma_k(\varphi_j) = \delta_{kj}, \quad 1 \leq k, j \leq 4 .$$

D'ailleurs les fonctions $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq 4}$ ont été <u>construites</u> pour vérifier ces relations!
au chapitre 8

- Les fonctions φ_j sont un <u>outil</u> pour représenter la fonction f dans l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$:

(10) $$x = x_j + \theta \, \Delta x, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

soit

(11) $$\theta = \frac{x - x_j}{x_{i+1} - x_i}, \quad 0 \leq j \leq N-1$$

(12) $f(x) = \xi_{j+1/2}(\theta(x))$, $x \in [x_j, x_{j+1}]$

avec

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} \xi_{j+1/2}(\theta) = u_j \varphi_1(\theta) + u_{j+1} \varphi_2(\theta) + \\ \qquad \Delta x \left[v_j \varphi_3(\theta) + v_{j+1} \varphi_4(\theta) \right], \; 0 \leq \theta \leq 1 . \end{array} \right.$$

De cette façon, on a (voir les éléments de la preuve au paragraphe 2 du chapitre 8) :

(14) $f(x_j) = u_j$, $0 \leq j \leq N$

(15) $f'(x_j) = v_j$, $0 \leq j \leq N$,

ce qui permet d'assurer automatiquement la condition de raccord (5) pour la fonction f et sa dérivée première f' mais introduit des inconnues v_j pour $0 \leq j \leq N$.

(3) Raccord des dérivées secondes

- Nous avons "presque" réussi à mener à bien le programme proposé aux relations (4) et (5). Nous disposons d'une famille de fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfaisant à (4) et aux conditions (5) pour $k=0$ et $k=1$, paramétrée par le vecteur $V = (v_0, \ldots, v_N)^t \in \mathbb{R}^{N+1}$. Il nous reste à écrire les $(N-1)$ conditions de raccord pour la dérivée seconde aux sommets intérieurs à l'intervalle $[a,b]$, c'est à dire pour $x_1 < \cdots < x_{N-1}$. Mais nous disposons de $(N+1)$ paramètres $v_0, \ldots, v_N$. Afin de poser correctement le problème, le choix d'une interpolation "par splines" [mais on pouvait faire d'autres choix !] consiste à annuler la dérivée seconde aux bornes a et b de l'intervalle :

$$(16) \qquad f''(a) = 0, \quad f''(b) = 0 .$$

• Pour poser le calcul, nous avons besoin de connaître les dérivées secondes des fonctions de base φ_j en $\theta = 0$ et $\theta = 1$. Comme ce sont des polynomes, le calcul est très simple, et a été proposé au Chapitre 8 ; on a

$$(17) \quad \begin{cases} \varphi_1''(0) = -6, \ \varphi_2''(0) = 6, \ \varphi_3''(0) = -4, \ \varphi_4''(0) = -2 \\ \varphi_1''(1) = 6, \ \varphi_2''(1) = -6, \ \varphi_3''(1) = 2, \ \varphi_4''(1) = +4 . \end{cases}$$

Les dérivées secondes en $\theta = 0$ et $\theta = 1$ des fonctions auxiliaires $\xi_{j+1/2}$ introduites à la relation (13) valent alors

$$(18) \quad \xi_{j+1/2}''(0) = -6u_j + 6u_{j+1} + \Delta x\,(-4v_j - 2v_{j+1})$$

$$(19) \quad \xi_{j+1/2}''(1) = 6u_j - 6u_{j+1} + \Delta x\,(2v_j + 4v_{j+1})$$

$$0 \leq j \leq N-1 .$$

Comme la dérivée seconde de f par rapport à la variable x est très simplement reliée à la dérivée seconde de $\xi_{j+1/2}$ par rapport à la variable θ dans l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ via les relations (10) et (11), c'est à dire

$$(20) \qquad f''(x) = \frac{1}{\Delta x^2}\,\xi''_{j+1/2}(\theta)\,, \quad 0 \leq \theta \leq 1,\ x = x_j + \theta\Delta x\,,$$

on a

$$(21) \qquad f''(x_j^-) \equiv \lim_{\substack{x\to x_j\\ x<x_j}} f''(x) = \frac{1}{\Delta x^2}\,\xi''_{j-1/2}(1)\,, \quad 1\leq j\leq N,$$

$$(22) \qquad f''(x_j^+) \equiv \lim_{\substack{x\to x_j\\ x>x_j}} f''(x) = \frac{1}{\Delta x^2}\,\xi''_{j+1/2}(0)\,, \quad 0\leq j\leq N-1$$

- on déduit de (22) et (18):

$$(23) \qquad f''(a) = \frac{1}{\Delta x^2}\,\xi''_{1/2}(0) = \frac{-6u_0+6u_1+\Delta x(-4v_0-2v_1)}{\Delta x^2}$$

et la première condition de (16) prend la forme simple

$$(24) \qquad 2v_0 + v_1 = \frac{3}{\Delta x}(u_1 - u_0)\,.$$

- On a ensuite $(N-1)$ relations de raccord à écrire aux $(N-1)$ sommets internes $(x_j)_{1\leq j\leq N-1}$. On a compte tenu de (21) et (19):

$$(25) \qquad \Delta x^2 f''(x_j^-) = 6u_{j-1} - 6u_j + \Delta x(2v_{j-1} + 4v_j)$$

puis en vertu de (22) et (18):

$$(26) \qquad \Delta x^2 f''(x_j^+) = -6u_j + 6u_{j+1} + \Delta x(-4v_j - 2v_{j+1})$$

quand on égalise les membres de droite des relations (25) et (26), on exprime la <u>continuité</u> de f'' au point x_j (car on égalise alors également les membres de gauche de ces mêmes relations !). Il vient

$$(27) \quad v_{j-1} + 4v_j + v_{j+1} = \frac{3}{\Delta x}\left(u_{j+1} - u_{j-1}\right), \quad 1 \leq j \leq N-1$$

- on déduit enfin de (21) et (19) avec $j = N$:

$$(28) \quad f''(b) = \frac{1}{\Delta x^2}\, \xi''_{N-1/2}(1) = \frac{1}{\Delta x^2}\left(6u_{N-1} - 6u_N + \Delta x\left(2v_{N-1} + 4v_N\right)\right)$$

et la seconde condition de (16) s'écrit :

$$(29) \quad v_{N-1} + 2v_N = \frac{3}{\Delta x}\left(u_N - u_{N-1}\right).$$

4 <u>Résolution d'un système linéaire tridiagonal</u>

- Pour construire f satisfaisant à (3) et (4) telle que f soit polynomiale de degré ≤ 3 dans chaque intervalle de la forme $[x_j, x_{j+1}]$ avec $f''(a) = f''(b) = 0$, il suffit donc de trouver des coefficients réels $(v_0, \ldots, v_N)$ qui sont, à un coefficient près, les dérivées de f aux points de grille, de sorte que les relations (24), (27) et (29) soient vérifiées. La fonction $f(\bullet)$ est alors calculée, pour x dans l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$, par les relations (12)(13).

• On écrit les $n = N+1$ relations relatives au vecteur $V = (v_0, \dots, v_N)^t$ des inconnues sous la forme d'un système linéaire

(30) $$A V = B.$$

Dans la relation (30), B est un vecteur de $\mathbb{R}^N$ égal au second membre des relations (24), (27) et (29). On a :

(31) $$B = \frac{3}{\Delta x}\left(u_1 - u_0, u_2 - u_0, \dots, u_{j+1} - u_{j-1}, \dots, u_N - u_{N-2}, u_N - u_{N-1}\right)^t$$

avec une attention particulière portée au <u>premier</u> et au <u>dernier</u> élément du vecteur B. La matrice A est d'ordre n, <u>tridiagonale</u> car les équations pour v_j ne comportent des coefficients non nuls qu'avec les valeurs voisines v_{j-1} et v_{j+1}, quand elles existent ! On a :

(32) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

• La résolution effective du système (30) s'effectue grâce à une factorisation "LU" de Gauss de la matrice A. Cette approche a été introduite et détaillée au Chapitre 9. Nous en rappelons l'essentiel. On détermine des coefficients $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ et $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, de sorte que les matrices d'ordre n L (inférieure) et U (supérieure) définies par

$$(33) \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(34) \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \alpha_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

permettent de factoriser A.

$$(35) \qquad L \cdot U = A$$

• Comme le cas général a été traité au Chapitre 9, nous y renvoyons le lecteur. Nous proposons ici de traiter le cas de splines avec $N=3$, soit $n=4$, c'est à dire le cas de la matrice particulière

$$(36)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si L et U sont données par les relations (33) et (34) (avec $n=4$), on a :

$$L\cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ \gamma_1\alpha_1 & \gamma_1\beta_1+\alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \gamma_2\alpha_2 & \gamma_2\beta_2+\alpha_3 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \gamma_3\alpha_3 & \gamma_3\beta_3+\alpha_4 \end{pmatrix}$$

et l'identification de cette dernière matrice avec la matrice A de la relation (36) conduit à :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2,\ \beta_1 = 1,\ \gamma_1\alpha_1 = 1,\ \gamma_1\beta_1 + \alpha_2 = 4,\ \beta_2 = 1, \\ \gamma_2\alpha_2 = 1,\ \gamma_2\beta_2 + \alpha_3 = 4,\ \beta_3 = 1,\ \gamma_3\alpha_3 = 1, \\ \gamma_3\beta_3 + \alpha_4 = 2. \end{cases}$$

on en déduit sans difficulté :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2,\ \beta_1 = 1,\ \gamma_1 = \frac{1}{2},\ \alpha_2 = \frac{7}{2},\ \beta_2 = 1,\ \gamma_2 = \frac{2}{7}, \\ \alpha_3 = \frac{26}{7},\ \beta_3 = 1,\ \gamma_3 = \frac{7}{26},\ \alpha_4 = \frac{45}{26}. \end{cases}$$

- Une fois les matrices L et U explicitées, la résolution du système (30) qui s'écrit aussi

$$(37) \qquad LUV = B$$

conduit à la résolution de <u>deux</u> systèmes linéaires pour des matrices <u>triangulaires</u>, pour laquelle une résolution par substitution est parfaitement adaptée. On résout d'abord le système

$$(38) \qquad Ly = B$$

à l'aide d'un algorithme de "descente", puis le système

$$(39) \qquad UV = y$$

avec une "remontée". Dans le cas numérique proposé plus haut et le choix particulier

$$(40) \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix},$$

on est conduit à résoudre l'équation (38) qui prend la forme particulière

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/26 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$$

soit $y_1 = 4$, $y_2 = 9$, $y_3 = \frac{59}{7}$, $y_4 = \frac{45}{26}$.
Puis le système linéaire (39) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 26/7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 45/26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 59/7 \\ 45/26 \end{pmatrix}.$$

On commence par la dernière équation, et on "remonte" de proche en proche. Il vient :

$$v_3 = 1, \quad v_2 = \frac{7}{26}\left(\frac{59}{7} - 1\right) = \frac{1}{26} \times 52 = 2,$$

$$v_1 = \frac{2}{7}(9 - 2) = 2, \quad v_0 = \frac{1}{2}(4 - 2) = 1.$$

5) En guise de conclusion.

L'interpolation par splines est un outil de base pour la géométrie industrielle et la construction automatisée par les ordinateurs. L'algorithmique effective est beaucoup plus simple que l'exemple algébrique présenté en partie 4 !

D, décembre 2004.