Proies et prédateurs

① Introduction

Ce système de deux équations différentielles couplées a été proposé par Lotka et Volterra en 1926. Il fonde en un certain sens l'écologie mathématique. Ce qui est nouveau en comparaison des chapitres précédents est la non linéarité des équations.

Pour un système dynamique très général

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} = f(u)$$

la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est supposée très régulière. Elle était linéaire dans les chapitres précédents : il existe une matrice A de sorte que

$$(2) \qquad f(u) = A \cdot u \,, \quad u \in \mathbb{R}^n .$$

Elle est non linéaire dans l'étude des proies et prédateurs : si u et v sont deux états de $\mathbb{R}^n$, on a

$$(3) \qquad f(u+v) \neq f(u) + f(v)$$

en général. Notons que dans le cas linéaire, le problème (1) joint à la condition initiale

$$(4) \qquad u(0) = u_0 \, , \quad u_0 \in \mathbb{R}^n$$

admet une solution unique qu'on peut "calculer de façon analytique":

$$(5) \qquad u(t) = \exp(tA) \cdot u_0$$

où

$$(6) \qquad \exp(tA) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j \, ,$$

en utilisant "l'exponentielle de matrice" introduite à la relation (6).

Dans le cas d'une dynamique non linéaire (3), on ne dispose pas d'une telle formule et la "résolution numérique" est l'un des seuls moyens d'investigation de la fonction $u(t)$.

② Modélisation

On dispose d'une part de proies en nombre $x(t)$ au temps t et on fait l'hypothèse méthodologique qu'on peut supposer t variable réelle et $x(t)$ champ réel aussi. Cette hypothèse est discutable mais nous n'aborderons pas ici ces questions.

* Si on laisse les proies seules, elles prolifèrent et suivent typiquement une évolution de type

(7) $$x_+(t) = e^{at} x_0, \quad a > 0, \quad t \geq 0$$

On en déduit

(8) $$\frac{dx_+}{dt} = a x_+$$

pour le terme de croissance des proies.

* Si on suppose que les proies sont soumises à l'action de <u>un</u> prédateur, leur nombre $x_-(t)$ suit une trajectoire telle que

(9) $$x_-(t) = e^{-bt} x_0, \quad b > 0, \quad t \geq 0.$$

on en déduit

(10) $$\frac{dx_-}{dt} = -b x_- .$$

* En présence de y prédateurs, chaque prédateur attaque les proies de façon indépendante les une des autres et la relation (10) doit être remplacée par

(11) $$\frac{dx_-}{dt} = -b\, y\, x_- .$$

* La synthèse de ces deux facteurs d'évolution exprime que la vitesse d'évolution du nombre de proies est la somme de deux termes :

$$(12) \qquad \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_+ + \left(\frac{dx}{dt}\right)_-$$

Le terme de croissance $\left(\frac{dx}{dt}\right)_+$ est calculé à l'aide de la relation (8) :

$$(13) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_+ = ax .$$

Le terme de décroissance $\left(\frac{dx}{dt}\right)_-$ est calculé à l'aide de la relation (11) :

$$(14) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)_- = -bxy .$$

* on injecte les relations (13) et (14) au sein de (12) :

$$(15) \qquad \frac{dx}{dt} = ax - bxy, \quad a>0, b>0.$$

* Si on laisse les prédateurs seuls sans proie, ils ne peuvent pas se nourrir, ce qui conduit à un terme $\left(\frac{dy}{dt}\right)_-$ et si on laisse les prédateurs en présence de proies, on dispose d'un terme $\left(\frac{dy}{dt}\right)_+$. La vitesse de variation du nombre de proies $y(t)$ vérifie :

(16) $\frac{dy}{dt} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_+ + \left(\frac{dy}{dt}\right)_-$.

* Si on suppose que les y prédateurs se partagent une proie toujours (artificiellement) renouvelée, on a typiquement

(17) $y_+(t) = e^{dt} y_0, \ d>0, \ t \geq 0$

ce qui entraîne $\frac{dy_+}{dt} = dy_+$. Si on dispose de x proies au lieu d'une seule, l'équation précédente est remplacée par

$$\frac{dy_+}{dt} = dxy_+$$

et on a finalement

(18) $\left(\frac{dy}{dt}\right)_+ = dxy$.

* Si on laisse les prédateurs sans proie, ils périclitent avec une certaine constante de temps :

(19) $y_-(t) = e^{-ct} y_0, \ c>0, \ t \geq 0$

on a alors $\frac{dy_-}{dt} = -cy_-$ et le terme de décroissance des prédateurs est donné par

(20) $\left(\frac{dy}{dt}\right)_- = -cy$.

Si on injecte les relations (18) et (20) au sein de (16), on déduit

(21) $$\frac{dy}{dt} = dxy - cy.$$

③ Le système d'équations.

La dynamique proie - prédateur est un système couplé d'inconnues (x, y) composé de (15) et (21) :

(22) $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = y(-c + dx). \end{cases}$$

④ Points fixes.

On cherche (x^*, y^*) compatible avec une dynamique "immobile" :

(23) $$\frac{d}{dt}x^* = 0, \quad \frac{dy^*}{dt} = 0$$

Compte tenu de (22), le système (23) est équivalent à

(24) $$\begin{cases} x^*(a - by^*) = 0 \\ y^*(c - dx^*) = 0. \end{cases}$$

- La résolution de (24) conduit à

(25) $(x^*, y^*) = (0, 0)$ <u>ou</u> $(x^*, y^*) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

En effet, la première équation de (24) entraîne $x^* = 0$ <u>ou</u> $a - by^* = 0$. Si $x^* = 0$, on reporte dans la seconde équation de (24) et on en déduit $y^* = 0$. D'où la première solution de la relation (25). Si $x^* \neq 0$, alors $y^* = \frac{a}{b}$, qui est <u>non nul</u>. Quand on reporte $y^* \neq 0$ dans la seconde relation de (24), on en déduit $c - dx^* = 0$. D'où le second point fixe.

- On peut réécrire le système (22) en introduisant des grandeurs sans dimension

(26) $$\xi = \frac{x}{x^*} = d\frac{x}{c} \; ; \; \varsigma = \frac{y}{y^*} = b\frac{y}{a}.$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{c}{d}\xi\left(a - b\frac{a}{b}\varsigma\right) = \frac{ac}{d}\xi(1-\varsigma)$$

$$\frac{d\varsigma}{dt} = \frac{a}{b}\varsigma\left(-c + d\frac{c}{d}\xi\right) = \frac{ac}{b}\varsigma(-1+\xi).$$

(27) $$\alpha = \frac{ac}{d}, \quad \beta = \frac{ac}{b}.$$

(28) $$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \alpha\,\xi(1-\varsigma) \\ \dfrac{d\varsigma}{dt} = \beta\,\varsigma(-1+\xi). \end{cases}$$

On a donc mis en évidence le système (28), <u>sans</u> dimension.

5) Résolution approchée

Posons

$$(29) \qquad u = \begin{pmatrix} \xi \\ \varsigma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

et

$$(30) \qquad f(u) = \begin{pmatrix} \alpha \xi (1-\varsigma) \\ \beta \varsigma (-1+\xi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Le système (28) s'écrit alors

$$(31) \qquad \frac{du}{dt} = f(u) .$$

* La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie en (30) est <u>NON</u> linéaire. La relation (3) est vraie en général si u et v sont deux points arbitraires de $\mathbb{R}^2$. Une résolution analytique est en conséquence essentiellement impossible.

De plus, l'utilisation d'un schéma implicite comme le schéma d'Euler implicite

$$(32) \qquad \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = f(u^{k+1}) \quad , \Delta t > 0$$

conduit à une équation d'inconnue u^{k+1} :

$$(33) \qquad u^{k+1} - \Delta t \, f(u^{k+1}) = u^k$$

qui est en soi, délicate à résoudre. On opte pour une famille de schémas explicites :

* Euler explicite

$$(34) \quad \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = f(u^k)$$

$$(35) \quad u^{k+1} = u^k + \Delta t\, f(u^k)$$

* Heun

$$(36) \quad \begin{cases} \dfrac{\tilde{u} - u^k}{\Delta t} = f(u^k) \\ \dfrac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}\left[f(u^k) + f(\tilde{u})\right] \end{cases}$$

$$(37) \quad \begin{cases} \tilde{u} = u^k + \Delta t\, f(u^k) \\ u^{k+1} = u^k + \frac{1}{2}\Delta t\left[f(u^k) + f(\tilde{u})\right] \end{cases}$$

* Runge Kutta

$$(38) \quad \begin{cases} \hat{u} = u^k + \dfrac{\Delta t}{2} f(u^k) \\ \hat{\hat{u}} = u^k + \dfrac{\Delta t}{2} f(\hat{u}) \\ \tilde{u} = u^k + \Delta t\, f(\hat{\hat{u}}) \\ u^{k+1} = u^k + \dfrac{\Delta t}{6}\left(f(u^k) + 2f(\hat{u}) + 2f(\hat{\hat{u}}) + f(\tilde{u})\right) \end{cases}$$

Dubois, juin 08.