le cnam

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Cours 04 — Equation de la chaleur

- Modélisation physique

On exprime la conservation de l'énergie dans le contexte de la mécanique des milieux continus. La variation au cours du temps de l'énergie interne volumique $\rho\, e$ est équilibrée par la divergence du flux de chaleur q:

(1) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, e) + \frac{\partial q}{\partial x} = 0\,, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0\,.$$

Dans l'hypothèse d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes, on peut écrire l'énergie interne spécifique e en fonction de la capacité calorifique à volume constant c_v et de la température T: $e = c_v T$. Par ailleurs, pour de nombreux milieux continus, on peut supposer la loi de Fourier : le flux de chaleur est proportionnel au gradient de la température, c'est à dire $q = -k \dfrac{\partial T}{\partial x}$. On reporte les expressions précédentes au sein de la loi de conservation (1) et on change le nom de la fonction inconnue qui devient $u(x, t)$ au lieu de $T(x, t)$. On obtient ainsi l'équation de la chaleur :

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,,$$

avec le coefficient de conductivité thermique κ donné par la relation $\kappa = \dfrac{k}{\rho\, c_v}$.

- Discrétisation par différences finies de la dérivée seconde en espace

On se donne une grille de pas $\Delta x > 0$ et on cherche à approcher la dérivée partielle $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j$ au point $j \Delta x$ par les valeurs ponctuelles u_{j-1}, u_j et u_{j+1}. On a d'abord une approximation de la dérivée première $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ au point intermédiaire $\left(j + \dfrac{1}{2}\right) \Delta x$ en fonction des valeurs u_j et u_{j+1}:

(3) $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1/2} \approx \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}\,.$$

De même, en changeant j en $(j-1)$, on a

(4) $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j-1/2} \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}\,.$$

Puis on applique le même raisonnement pour la dérivée de la fonction dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ de part et d'autre du point $j \Delta x$:

(5) $$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1/2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j-1/2}\right].$$

On reporte le résultat des relations (3) et (4) dans la relation (5) et il vient

(6) $$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \approx \frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{j-1} - 2\, u_j + u_{j+1}\right).$$

François Dubois, 25 avril 2017.

- Schéma explicite en temps et centré en espace

On discrétise maintenant l'équation aux dérivées partielles (2) en espace et en temps. On se donne un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$. Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note u_j^n une approximation de $u(j\,\Delta x,\, n\,\Delta t)$. On discrétise la dérivée en temps par un schéma aux différences finies à deux points :

(7) $$\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)_j^n \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}\,.$$

Puis on discrétise la dérivée seconde en espace par un schéma centré à l'instant $n\,\Delta t$:

(8) $$\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_j^n \approx \frac{1}{\Delta x^2}\big(u_{j-1}^n - 2\,u_j^n + u_{j+1}^n\big)\,.$$

On obtient ainsi le schéma explicite en temps et centré en espace pour approcher l'équation de la chaleur (2) par la méthode de différences finies :

(9) $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\kappa}{\Delta x^2}\big(u_{j-1}^n - 2\,u_j^n + u_{j+1}^n\big) = 0\,.$$

On introduit le paramètre sans dimension ζ défini par la relation $\zeta \equiv \dfrac{\kappa\,\Delta t}{\Delta x^2}$. Alors le schéma (9) peut se réécrire comme une formule où on calcule la valeur au nouvel instant $(n+1)\,\Delta t$ en fonction des valeurs voisines à l'instant courant :

(10) $$u_j^{n+1} = u_j^n + \zeta\,\big(u_{j-1}^n - 2\,u_j^n + u_{j+1}^n\big)\,.$$

- Condition initiale et conditions aux limites.

Pour cette leçon introductive à l'équation de la chaleur, on se donne une longueur $L > 0$ et on se place pour fixer les idées dans l'intervalle borné $[0, L]$. A l'instant initial ($t = 0$), on se donne une fonction de l'espace $u_0(x)$ pour $0 < x < L$:

(11) $$u(x, 0) = u_0(x)\,, \quad 0 < x < L\,.$$

On se donne aussi une condition limite dite "de Dirichlet homogène" aux bords $x = 0$ et $x = L$ à tout instant $t > 0$:

(12) $$u(0, t) = 0\,, \quad u(L, t) = 0\,, \quad t > 0\,.$$

On peut alors démontrer que, sous des hypohèses raisonnables d'un point de vue mathématique, le problème d'évolution (2) joint à la condition initiale (11) et aux conditions limites (12) a une solution unique $u(x, t)$ pour $0 \le x \le L$ et $t \ge 0$.

La discrétisation des conditions initiales et aux limites impose de fixer un nombre $J \ge 1$ de points de grille : $\Delta x = \dfrac{L}{J}$. Compte tenu de (11), la condition initiale discrète prend la forme

(13) $$u_j^0 = u_0(j\,\Delta x)\,, \quad 1 \le j \le J-1\,.$$

Les conditions limites (12) prennent la forme discrète suivante :

(14) $$u_0^n = 0\,, \quad u_J^n = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

puisque $L = J\,\Delta x$. Le lecteur peut se rendre compte par lui-même que l'équation d'évolution discrète (10) pour $1 \le j \le J-1$ jointe aux conditions (13)(14) définit une unique famille discrète u_j^n solution du schéma numérique.

Cette famille discrète u_j^n a été évaluée numériquement dans le cas $L = 1$ pour élaborer le document compagnon, pour la condition initiale particulière $u_0(x) = \sin(\pi x)$ avec $J = 16$ points de grille.

• Solution analytique du problème continu pour une condition initiale sinusoïdale

On se donne un entier $k \geq 1$ et une condition initiale

(15) $\quad u_0(x) = \widehat{u}_k \sin\Big(\dfrac{k\pi x}{L}\Big), \quad 0 \leq x \leq L.$

Alors on peut calculer analytiquement (c'est à dire avec avec une formule) la solution du problème constitué des relations (2)(11)(12) et (15) ; on la cherche sous la forme

(16) $\quad u(x,t) = g(t) \sin\Big(\dfrac{k\pi x}{L}\Big), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0.$

On calcule $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour la fonction u donnée à la relation (16) et on reporte les expressions obtenues dans la relation (2). On trouve :

(17) $\quad 0 = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Big[\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \kappa\Big(\dfrac{k\pi}{L}\Big)^2 g(t)\Big] \sin\Big(\dfrac{k\pi x}{L}\Big), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0.$

On insiste sur le fait que la relation (17) est vraie pour tout x entre 0 et L et tout instant $t > 0$. En choisissant x de sorte que $\sin\big(\frac{k\pi x}{L}\big)$ soit non nul, on en déduit que la fonction $g(t)$ vérifie l'équation différentielle $\quad \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \kappa\Big(\dfrac{k\pi}{L}\Big)^2 g(t) = 0 \quad$ pour $t > 0$.

Cette équation a été résolue lors de la première leçon. Compte tenu de la condition initiale (15), il vient $\quad g(t) = \widehat{u}_k \exp\Big(-\kappa \dfrac{k^2\pi^2 t}{L^2}\Big) \quad$ avec $t \geq 0$. La solution analytique du problème (2)(11)(12)(15) est donné par la relation

(18) $\quad u(x,t) = \widehat{u}_k \exp\Big(-\kappa \dfrac{k^2\pi^2 t}{L^2}\Big) \sin\Big(\dfrac{k\pi x}{L}\Big), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0.$

• Stabilité du schéma numérique explicite

Comme pour la leçon précédente, on regarde la solution du schéma (10) si on suppose que u_j^n au n^{o} instant est une onde de vecteur d'onde K:

(19) $\quad u_j^n = \widehat{u}_K \exp\Big(iKj\Delta x\Big), \quad j \in \mathbb{Z}.$

On introduit le nombre d'onde $\xi \equiv K\Delta x$ et on a après un calcul élémentaire laissé au lecteur : $u_{j+1}^n = \exp(i\xi)\, u_j^n$ et $u_{j-1}^n = \exp(-i\xi)\, u_j^n$. Quand on injecte ces expressions dans le schéma (10), il vient alors $\quad u_j^n{+}1 = g(\zeta, \xi)\, u_j^n. \quad$ Pour une onde de vecteur d'onde K, le schéma aux différences finies (10) se réduit à une simple suite géométrique et raison $g(\zeta, \xi)$. Un calcul laissé au lecteur montre que le coefficient d'amplification $g(\zeta, \xi)$ est donné par la relation

(20) $\quad g(\zeta, \xi) = 1 - 4\zeta \sin^2\Big(\dfrac{\xi}{2}\Big).$

La condition de stabilité de von Neumann ($|g(\zeta, \xi)| \leq 1 \ \forall \xi \in \mathbb{R}$) s'exprime alors sous la forme

(21) $\quad 0 \leq \zeta \leq \dfrac{1}{2}.$

Dans le document compagnon, on montre ce qui se passe si on prend par exemple $\zeta = 1$. Les erreurs d'arrondis finissent par s'amplifier ; le schéma est instable et ses résultats n'ont bientôt plus rien à voir avec la solution analytique (18).