le cnam

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Cours 06 Problème de Poisson à une dimension d'espace

- Introduction

On se donne l'équation de la chaleur pour une dimension d'espace avec une source F qui ne dépend que de l'espace et pas du temps :

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x)\,, \quad 0 < x < L\,, \quad t > 0\,.$

On se donne une condition initiale et des conditions aux limites (dites de Dirichlet) homogènes :

(2) $u(0) = 0\,, \quad u(L) = 0\,.$

On s'intéresse maintenant au comportement au temps long (c'est à dire pour $t \longrightarrow +\infty$) de la solution $u(x,t)$. Nous admettons ici qu'alors l'évolution est de plus en plus lente, la dérivée partielle $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ tend vers zéro et la solution $u(x,t)$ converge (en un sens qui demanderait à être précisé) vers une fonction limite $u_\infty(x)$ qui ne dépend que de l'espace. L'équation satisfaite par la fonction limite $u_\infty(x)$ consiste à éliminer la dérivée temporelle $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ de l'équation (1). On trouve alors $-\kappa \dfrac{\partial^2 u_\infty}{\partial x^2} = F(x)$ pour $0 < x < L$ et $u_\infty(0) = 0$, $u_\infty(L) = 0$ sur le bord. La solution limite au temps long satisfait à une équation aux dérivées partielles qui ne dépend que de l'espace associée à des conditions aux limites de Dirichlet. L'ensemble constitue le problème de Poisson pour le Laplacien $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$. Nous posons $F \equiv \kappa f$ et remplaçons la dérivée partielle par rapport à x par une dérivée ordinaire puisque maintenant le problème ne dépend que de l'espace. Il vient

(3) $-\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = f(x)\,, \quad 0 < x < L$

et nous lui associons les conditions aux limites (2).

- Unicité

Le problème (3)(1) a au plus une solution. Si $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont deux solutions de ce système, montrons que leur différence $u(x) \equiv u_1(x) - u_2(x)$ est nulle, ce qui établira la propriété. Par linéarité de la dérivation, la fonction $u(x)$ satisfait à l'équation

(4) $-\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = 0\,, \quad 0 < x < L\,.$

Comme les fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont nulles aux points 0 et L, la fonction $u(x)$ satisfait également aux conditions aux limites (2). Nous multiplions maintenant l'équation (4) par la fonction $u(x)$ elle-même et nous intégrons de 0 à L. Le résultat est bien entendu nul et nous calculons l'intégrale correspondante à l'aide d'une intégration par parties :

François Dubois, 04 mai 2017.

$$0 = -\int_0^L \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\, u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L \Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big)^2 \mathrm{d}x - \Big[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\, u(x)\Big]_0^L = \int_0^L \Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big)^2 \mathrm{d}x$$

compte tenu de la condition limite (2) qui énonce que la fonction u est nulle sur le bord. On déduit du calcul qui précède que la fonction positive $\Big(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big)^2$ a une intégrale nulle sur l'intervalle $]0, L[$. Cette fonction est donc nulle sur tout l'intervalle : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x) = 0$ pours tout x entre 0 et L. On en déduit que la fonction $u(x)$ est constante. Cette constante est nulle puisque $u(0) = 0$.

- Approximation par différences finies

Nous admettons que le problème de Poisson (3)(2) admet au moins une solution $u(x)$. Nous approchons cette fonction par la métode des différences finies. Nous nous donnons un entier $n \geq 1$ et divisons l'intervalle $]0, L[$ en $(n+1)$ petits intervalles de longueur Δx:

(5) $\quad \Delta x = \dfrac{L}{n+1}\,.$

Pour j nombre entier compris entre 0 et $n+1$, nous notons u_j une approximation de la solution u au point $j\Delta x$: $u_j \approx u(j\Delta x)$. Les conditions aux limites (2) s'écrivent naturellement au niveau discret :

(6) $\quad u_0 = 0\,, \quad u_{n+1} = 0\,.$

Il nous reste donc n inconnues scalaires $u_1, u_2, \ldots, u_n$ à déterminer. Comme dans les leçons sur l'équation de la chaleur, nous approchons la dérivée seconde pour l'abscisse $j\Delta x$ par un schéma à trois points :

(7) $\quad \Big(\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\Big)_j \approx \dfrac{u_{j-1} - 2\,u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2}\,, \quad 1 \leq j \leq n\,.$

Si nous notons $f_j = f(j\Delta x)$ les valeurs de la donnée au second membre de (3) aux points de la grille, nous devons donc résoudre les équations suivantes

(8) $\quad -u_{j-1} + 2\,u_j - u_{j+1} = \Delta x^2\, f_j\,, \quad 1 \leq j \leq n\,.$

Nous les détaillons ci-dessous pour les diverses valeurs de l'entier j:

(9) $$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,u_1 - u_2 & = & \Delta x^2\, f_1 \\ -u_1 + 2\,u_2 - u_3 & = & \Delta x^2\, f_2 \\ \cdots & & \\ -u_{j-1} + 2\,u_j - u_{j+1} & = & \Delta x^2\, f_j \\ \cdots & & \\ -u_{n-2} + 2\,u_{n-1} - u_n & = & \Delta x^2\, f_{n-1} \\ -u_{n-1} + 2\,u_n & = & \Delta x^2\, f_n \end{array} \right.$$

Nous introduisons le vecteur $U \in \mathbb{R}^n$ des inconnues et le second membre $F \in \mathbb{R}^n$ des données :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} , \quad F = \Delta x^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} .$$

Alors on peut introduire la matrice A suivante, composée de n lignes et de n colonnes :

$$(10) \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Le système (9) de n équations à n inconnues prend alors la forme matricielle

$$(11) \qquad A\,U = F\,.$$

Pour résoudre le problème de Poisson par la méthode des différences finies, on doit résoudre un système linéaire.

- Propriétés du système linéaire associé.

La matrice A définie à la relation (10) est composée d'élements non nuls seulement sur la diagonale principale, la diagonale juste en dessus et celle juste en dessous. Si nous notons a_{ij} l'élément de la matrice A à l'intersection de la $i^{\rm o}$ ligne et de la $j^{\rm o}$ colonne, on a :

$$(12) \qquad \begin{cases} a_{ii} = 2 & 1 \leq i \leq n \\ a_{i,i+1} = -1 & 1 \leq i \leq n-1 \\ a_{i,i-1} = -1 & 2 \leq i \leq n\,. \end{cases}$$

la matrice A est symétrique : $a_{ij} = a_{ij}$ pour toutes les lignes de numéro i et toutes les colonnes indexées par j. Surtout, elle est définie positive. Introduisons le produit scalaire $(U,V) \equiv \sum_{j=1}^n u_j\,v_j$ de deux vecteurs U et V de $\mathbb{R}^n$. Dire que A est définie positive signifie que les deux propriétés suivantes

$$(13) \qquad (A\,U,U) \geq 0\,, \quad \forall, U \in \mathbb{R}^n$$

$$(14) \qquad \big((A\,U,U) = 0\big) \implies \big(U = 0\big)$$

sont vraies. Nous les démontrons dans les lignes qui suivent.

Compte tenu de (9), le produit scalaire $(A\,U,U)$ peut se calculer facilement :

$$
\begin{aligned}
(A\,U\,,\,U) &= \big(2\,u_1 - u_2\big)\,u_1 + \big(-u_1 + 2\,u_2 - u_3\big)\,u_2 + \cdots + \big(-u_{j-1} + 2\,u_j - u_{j+1}\big)\,u_j + \cdots \\
&\qquad + \big(-u_{n-2} + 2\,u_{n-1} - u_n\big) + \big(-u_{n-1} + 2\,u_n\big) \\
&= 2\,u_1^2 - u_1\,u_2 + \sum_{j=2}^{n-1} \big(-u_{j-1} + 2\,u_j - u_{j+1}\big)\,u_j - u_{n-1}\,u_n + 2\,u_n^2 \\
&= 2\,\sum_{j=1}^{n} u_j^2 - u_1\,u_2 - \sum_{j=2}^{n-1} u_{j-1}\,u_j - \sum_{j=2}^{n-1} u_j\,u_{j+1} - u_{n-1}\,u_n \\
&= 2\,\sum_{j=1}^{n} u_j^2 - \sum_{j=2}^{n} u_{j-1}\,u_j - \sum_{j=1}^{n-1} u_j\,u_{j+1} \;=\; 2\,\sum_{j=1}^{n} u_j^2 - 2\,\sum_{j=1}^{n-1} u_j\,u_{j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} u_j^2 + u_n^2 + u_1^2 + \sum_{j=1}^{n-1} u_{j+1}^2 - 2\,\sum_{j=1}^{n-1} u_j\,u_{j+1} \;=\; u_1^2 + u_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \big(u_j^2 - 2\,u_j\,u_{j+1} + u_{j+1}^2\big)
\end{aligned}
$$

et

$$
(A\,U\,,\,U) = u_1^2 + u_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \big(u_j - u_{j+1}\big)^2\,. \tag{15}
$$

Le produit scalaire $(A\,U\,,\,U)$ est une somme de carrés de nombres réels. C'est donc un nombre positif ou nul et la relation (13) est satisfaite. De plus, si $(A\,U\,,\,U)$ est nul, alors tous les termes du membre de droite de (15) sont nuls ; donc tous les nombres u_j sont égaux au nombre u_1 qui est nul lui aussi. DOnc toutes les composantes du vecteur U sont nuls et $U = 0$, ce qui établit la propriété (14).

Le système linéaire (11) est associé à une matrice A dont le noyau est réduit à zéro. En effet, si $A\,U = 0$, le produit scalaire $(A\,U\,,\,U)$ est nul, donc $U = 0$ compte tenu de la propriété (14). On en déduit que quel que soit le second membre F, le système linéaire (11) proposé par la méthode des différences finies pour approcher le problème de Poisson à une dimension spatiale (3) avec les conditions de Dirichlet (2) a toujours une solution et une seule.