le cnam

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Cours 07 — Schéma à cinq points pour le Laplacien

- Introduction

Cette leçon est la suite directe de la précédente. On passe simplement d'une dimension à deux dimension spatiales. On se donne deux longueurs $L > 0$ et $M > 0$. L'équation de Poisson dans le domaine $\Omega \equiv]0, L[\times]0, M[$ s'écrit

(1) $\quad -\Delta u(x, y) = f(x, y) \,, \quad (x, y) \in \Omega$

pour un second membre $f(x, y)$ qui est une fonction arbitraire $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Rappelons que le Laplacien Δ est défini par $\Delta u(x, y) \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en tout point $(x, y) \in \Omega$. La fonction inconnue $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait une condition limite de Dirichlet homogène sur le bord $\partial\Omega$:

(2) $\quad u(x, y) = 0 \,, \quad (x, y) \in \partial\Omega \,.$

Le bord $\partial\Omega$ du domaine Ω est simplement constitué par l'ensemble des quatre côtés du carré :

$\partial\Omega \equiv \big([0, L] \times \{0\}\big) \cup \big(\{L\} \times [0, M]\big) \cup \big([0, L] \times \{M\}\big) \cup \big(\{0\} \times [0, M]\big) \,.$

On peut voir l'équation (1) comme l'équation limite d'un problème de thermique où la température $u(x, y, t)$ suit une évolution instationnaire qui finit par tendre vers une distribution constante en temps mais variable en espace.

L'équation de Poisson est aussi un modèle simplifié en vue de la mécanique des structures. Si on modélise le déplacement d'un point de la surface Ω par un champ de vecteurs $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, on forme le tenseur des déformations $\varepsilon(u)$ qui est une matrice symétrique définie en tout point de Ω, combinaison linéaire des dérivées premières du champ u. L'hypothèse d'un solide élastique induit une loi de comportement avec un tenseur des contraintes $\sigma(u)$ qui est une fonction linéaire du tenseur des contraintes (loi de Hooke). L'équilibre mécanique de la plaque se traduit alors par la nullité de toutes les forces appliquées, qu'elles soient d'origine interne ($\mathrm{div}\sigma$) ou externe (f) : $\quad \big(\mathrm{div}\sigma(u)\big)(x, y) + f(x, y) = 0$. On obtient alors l'équation des solides élastiques à l'équilibre, équation plus compliquée que l'équation de Poisson (1), mais qui possède des propriétés mathématiques voisines. Pour une introduction détaillée à la mécanique des structures, nous renvoyons le lecteur par exemple au cours de Paul Germain et Pierre Muller [*Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, 1979].

- Intégration par parties

En vue de prouver l'unicité, nous rappelons ici la formule d'intégration par parties dans le cas d'un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega$ assez régulière. Pour un point sur le bord $\partial\Omega$, on peut alors se donner (sauf aux coins) un vecteur normal $n(x, y)$ qui pointe vers l'extérieur de Ω et de norme unité : $\qquad |n(x, y)| = 1 \,, \quad (x, y) \in \partial\Omega \,.$

François Dubois, 04 mai 2017.

On note n_j la j^{o} composante de ce vecteur normal, avec $j=1$ ou $j=2$ si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Le long du bord, on dispose d'une abscisse curviligne $\gamma(x,\,y)$ qui mesure la longueur de la courbe $\partial\Omega$. Si on se donne deux fonctions assez régulières v et w sur Ω (de classe $\mathscr{C}^1$ pour fixer les idées), on a alors la relation

$$(3) \qquad \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j}\, w(x,\,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = -\int_\Omega v(x,\,y)\, \frac{\partial w}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} v\, w\, n_j\, \mathrm{d}\gamma(x,\,y)\,, \quad j=1,\,2\,.$$

On utilise la relation (3) dans le cas particulier où $v \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$:

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\, w(x,\,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j}\, \frac{\partial w}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, w\, n_j\, \mathrm{d}\gamma(x,\,y)\,, \quad j=1,\,2\,.$$

On somme sur l'entier j la relation précédente et on considère le cas particulier où $w \equiv u$. On introduit le vecteur gradient de u, c'est à dire $\nabla u \equiv \Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\Big)$. On obtient alors

$$(4) \qquad \int_\Omega \Delta u\, u(x,\,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = -\int_\Omega |\nabla u|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} \Big(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, n_j\Big)\, u(x,\,y)\, \mathrm{d}\gamma(x,\,y)\,.$$

- Unicité

Comme dans le cas d'une seule dimension spatiale, le problème (1)(2) a au plus une solution. En d'autres termes, deux solutions du problème (1)(2) sont nécéssairement égales. En effet, si $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont deux solutions de ce système, montrons que leur différence $u(x) \equiv u_1(x) - u_2(x)$ est nulle, ce qui établira la propriété. Par linéarité de la dérivation, la fonction $u(x)$ satisfait à l'équation homogène

$$(5) \qquad -\Delta u(x,\,y) = 0\,, \quad (x,\,y) \in \Omega\,.$$

Comme les fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont nulles sur le bord du domaine, la fonction $u(x)$ satisfait également aux conditions aux limites (2). Nous multiplions ensuite l'équation (5) par la fonction $u(x)$ elle-même et nous intégrons sur Ω. Le résultat est bien entendu nul et nous calculons l'intégrale correspondante à l'aide de la relation (4) d'intégration par parties :

$$0 = -\int_\Omega \Delta u\, u(x,\,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_\Omega |\nabla u|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} \Big(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, n_j\Big)\, u(x,\,y)\, \mathrm{d}\gamma(x,\,y) = \int_\Omega |\nabla u|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

compte tenu de la condition limite (2) qui énonce que la fonction u est nulle sur le bord. On déduit du calcul qui précède que la fonction positive $|\nabla u|^2(x,\,y)$ a une intégrale nulle sur le domaine Ω. Cette fonction est donc nulle dans tout le domaine : $\nabla u(x,\,y) = 0$ pour tout point $(x,\,y) \in \Omega$. On en déduit que la fonction $u(x,\,y)$ est constante. De plus, cette constante est nulle puisque la fonction u est nulle sur le bord, ce qui établit la propriété.

- Approximation par différences finies

Nous admettons que le problème de Poisson (1)(2) admet au moins une solution $u(x,\,y)$. Nous approchons cette fonction par la métode des différences finies. Nous nous donnons deux entiers $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Nous divisons l'intervalle $]0,\,L[$ en $(n+1)$ sous-intervalles de longueur Δx et l'intervalle $]0,\,M[$ en $(m+1)$ parties de longueur Δy:

$$(6) \qquad \Delta x = \frac{L}{n+1}\,, \;\; \Delta y = \frac{M}{m+1}\,.$$

Pour i nombre entier compris entre 0 et $n+1$ et j entier entre 0 et $m+1$, nous notons u_{ij} une approximation de la solution u au point $(i\Delta x,\, j\Delta y)$: $u_{ij} \approx u(i\Delta x,\, j\Delta y)$. Les conditions aux limites (2) s'écrivent naturellement au niveau discret :

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{rrcll} \text{en bas :} & u_{i,0} & = & 0\,, & 0 \leq i \leq n+1\,, \\ \text{à droite :} & u_{n+1,\,j} & = & 0\,, & 0 \leq j \leq m+1\,, \\ \text{en haut :} & u_{i,m+1} & = & 0\,, & 0 \leq i \leq n+1\,, \\ \text{à gauche :} & u_{0,\,j} & = & 0\,, & 0 \leq j \leq m+1\,. \end{array} \right.$$

Nous avons donc nm inconnues scalaires u_{ij} pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. Nous approchons la dérivée partielle seconde selon la première variable par le schéma à trois points maintenant classique :

$$(8) \qquad \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_{ij} \approx \frac{u_{i-1,\,j} - 2\,u_{i,\,j} + u_{i+1,\,j}}{\Delta x^2}\,, \quad 1 \leq i \leq n$$

et la dérivée partielle seconde selon la seconde variable à l'aide de la même approche :

$$(9) \qquad \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big)_{ij} \approx \frac{u_{i,\,j-1} - 2\,u_{i,\,j} + u_{i,\,j+1}}{\Delta y^2}\,, \quad 1 \leq j \leq m\,.$$

Le second membre f est connu au point $(i\Delta x,\, j\Delta y)$ et nous posons par exemple $f_{ij} = f(i\Delta x,\, j\Delta y)$. L'approximation aux différences finies de l'équation aux dérivées partielles (1) s'écrit dans ce cas :

$$(10) \qquad \frac{-u_{i-1,\,j} + 2\,u_{i,\,j} - u_{i+1,\,j}}{\Delta x^2} + \frac{-u_{i,\,j-1} + 2\,u_{i,\,j} - u_{i,\,j+1}}{\Delta y^2} = f_{ij}\,, \quad 1 \leq i \leq n\,,\ 1 \leq j \leq m\,.$$

Nous avons écrit un système linéaire de nm équations à nm inconnues.

- Numérotation des inconnues

Nous sommes maintenant devant un problème technique : comment numéroter l'ensemble des inconnues, alors que la numérotation naturelle utilisée jusqu'ici emploie deux indices ? Nous devons "unidimensionnaliser" le tableau des couples $(i,\, j)$ avec un indice I qui va de 1 à nm. Une solution possible (mais ce n'est pas la seule !) est de commencer par la première ligne (on prend les valeurs successives de i pour $j = 1$) puis de continuer avec la seconde ligne (même principe mais avec $j = 2$ cette fois) et de continuer ainsi en faisant croître petit à petit le numéro de la ligne. Nous construisons ainsi une fonction discrète, un numéro global $I = \nu(i,\, j)$ qui part de $I = 1$ pour $i = j = 1$ et atteint $I = nm$ si $i = n$ et $j = m$:

$$(11) \qquad \nu(i,\, j) = n\,(j-1) + i\,, \quad 1 \leq i \leq n\,,\ 1 \leq j \leq m\,.$$

Nous avons donc un vecteur de données $F \in \mathbb{R}^{nm}$ avec $F_{\nu(i,\,j)} = f_{ij}$ et le vecteur des inconnues $U \in \mathbb{R}^{nm}$ est numéroté de la même façon : $U_{\nu(i,\,j)} = u_{ij}$. La matrice A du système linéaire à résoudre comporte nm lignes et nm colonnes.

Afin de prendre en compte la numérotation particulière (11) où les lignes inférieures du domaine numérique sont numérotées avant les lignes supérieures, nous réécrivons l'équation (10) sous la forme

$$(12) \qquad -\frac{1}{\Delta y^2}\,u_{i,\,j-1} - \frac{1}{\Delta x^2}\,u_{i-1,\,j} + \Big(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}\Big)\,u_{i,\,j} - \frac{1}{\Delta x^2}\,u_{i+1,\,j} - \frac{1}{\Delta y^2}\,u_{i,\,j+1} = f_{ij}\,.$$

Si $I = \nu(i,\, j)$ est le numéro global du sommet de numéro $(i,\, j)$, alors le numéro global des sommets de numéros $(i,\, j-1)$, $(i-1,\, j)$, $(i+1,\, j)$ et $(i,\, j-1)$ sont respectivement $I-n$,

$I-1$, $I+1$ et $I+n$. A l'aide de cette numérotation globale, les relations (10) peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire :

(13) $\quad A\,U = F\,.$

- Etude d'un exemple

Afin de bien prendre conscience de l'ensemble du processus, nous détaillons ici la matrice du système à résoudre dans le cas particulier où $n=m=3$ et $\Delta x = \Delta y$. Nous avons représenté en (14) la numérotation des inconnues ainsi que les conditions aux limites (avec des zéros).

$$(14) \qquad \text{inconnues :} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

La matrice A s'écrit dans ce cas

$$(15) \qquad A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice symétrique qui est composée de trois blocs 3×3. Pour les blocs diagonaux, on a une matrice trois par trois qui ressemble beaucoup à celle obtenue pour l'étude monodimensionnelle :

$$(16) \qquad A_3 = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour les blocs situés de part et d'autre de la diagonale, on a simplement une matrice proportionnelle à l'identité. On pose

$$(17) \qquad J_3 = \frac{1}{\Delta y^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice A introduite à la relation (15) s'explicite sous forme de blocs à l'aide des matrices introduites en (16) et (17) :

$$(18) \qquad A = \frac{1}{\Delta y^2} \begin{pmatrix} A_3 & J_3 & 0 \\ J_3 & A_3 & J_3 \\ 0 & J_3 & A_3 \end{pmatrix}.$$

De plus, la matrice A explicitée à la relation (15) a des éléments non nuls seulement pour cinq diagonales : la diagonale principale, les diagonales situées juste au dessus et juste au dessous et deux autres diagonales distantes de $n=3$ de la diagonale principale.

• Structure matricielle

Les propriétés vues pour l'exemple traité au paragraphe précédent se généralisent sans difficulté. Dans le cas général, la matrice A du système linéaire (13) est d'ordre nm. Elle est symétrique, composée de cinq diagonales non nulles seulement ; on parle pour cette raison de "la matrice penta-diagonale du Laplacien". La matrice A se décompose aussi sous la forme de $m \times m$ blocs carrés d'ordre $n \times n$. De plus, c'est une matrice tridiagonale par blocs. Les blocs sur la diagonale principale sont notés A_n et nous nommons ici J_n ceux sur les deux diagonales de part et d'autre de la diagonale principale :

$$
(19) \qquad A = \begin{pmatrix}
A_n & J_n & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
J_n & A_n & J_n & 0 & & & & & 0 \\
0 & J_n & A_n & J_n & 0 & & & & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
0 & & 0 & J_n & A_n & J_n & 0 & & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & & & & 0 & J_n & A_n & J_n & 0 \\
0 & & & & & 0 & J_n & A_n & J_n \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & J_n & A_n
\end{pmatrix} .
$$

Les blocs diagonaux sont une généralisation de la matrice proposée en (16) :

$$
A_n = \begin{pmatrix}
\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
-\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
0 & 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & & & 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} & -\frac{1}{\Delta x^2} \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2}
\end{pmatrix} .
$$

Ce sont eux-mêmes des blocs tridiagonaux. Les blocs J_n sont simplement proportionnels à la matrice identité:

$$
J_n = \frac{1}{\Delta y^2} \begin{pmatrix}
-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & & & \vdots \\
0 & & -1 & & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -1
\end{pmatrix} .
$$

On peut montrer que la matrice symétrique A est aussi définie positive. En conséquence, le système linéaire (13) a une solution et une seule quel que soit le second membre.