le cnam

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Devoir numéro 1

À rendre pour le 16 avril 2019

On se propose d'étudier le système des proies et prédateurs, défini par les équations différentielles non linéaires suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t)\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -c\,y(t) + d\,x(t)\,y(t),$$

où a, b, c et d sont des constantes strictement positives.

1) Expliquer en quelques lignes les éléments de la dynamique sous-jacente à ces équations. Les proies sont repésentées par quelle variable ? Même question pour les prédateurs.

On se donne $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. On admet que le système différentiel, associé à des conditions initiales de la forme $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$, a une unique solution $\big(x(t), y(t)\big)$ qui dépend des quatre paramètres a, b, c, d et de la condition initiale (x_0, y_0).

2) Après avoir choisi un ensemble de paramètres a, b, c, d, x_0, y_0 qui **ne soient pas des nombres entiers** et **différents de ceux de vos voisins**, effectuer une première simulation avec le schéma numérique de votre choix. On représentera les résultats à la fois sous la forme de fonctions temporelles et dans le plan de phase des variables (x, y).

3) Démontrer que si $\big(x(t), y(t)\big)$ est solution du système différentiel, alors la fonction du temps J définie par $J(t) = d\,x(t) + b\,y(t) - c\,\ln(x(t)) - a\,\ln(y(t))$ reste constante et égale à sa valeur initiale.

4) Reprendre les résultats numériques précédents en représentant également sur le graphe des évolutions temporelles les variations numériques de la fonction J. Que pensez vous des résultats obtenus ?

5) Proposer une modification des paramètres de la simulation (changement de schéma numérique et/ou augmentation du nombre de mailles) afin d'aboutir à un résultat numérique qui conserve l'invariant J au cours du temps avec une bonne approximation.

6) On constate alors qu'après un certain temps T, l'état $\big(x(T), y(T)\big)$ est, avec une bonne approximation, égal à l'état initial (x_0, y_0). En admettant que le système différentiel des proies et prédateurs est périodique, c'est à dire qu'il existe $T > 0$ de sorte que $x(T) = x_0$ et $y(T) = y_0$, estimer du mieux que vous pouvez la valeur de la période T. Vous pourrez être amené à effectuer plusieurs simulations numériques qui devront être présentées avec soin.

7) Quelle est la valeur moyenne sur une période pour l'ensemble des poies ? Pour l'ensemble des prédateurs ? Pouvait-on prévoir le résultat ?

François Dubois et Isabelle Terrasse, 09 avril 2019.