le cnam

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Examen du 12 mai 2017, durée 1 heure 45

Les notes de cours personnelles et transmises lors des cours sont autorisées, sous forme papier et à l'exclusion de tout autre document. Les calculatrices sont interdites et inutiles. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies. Les deux exercices sont indépendants.

Afin de faciliter la correction, merci de rédiger les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part, sur des copies séparées.

Exercice 1. Une condition suffisante pour que le schéma d'Euler implicite soit bien défini

On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fois continuement dérivable telle qu'il existe un nombre strictement positif M de sorte que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|f'(u)| \leq M$. On considère le modèle non linéaire d'évolution :

(1) $\quad \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f\big(u(t)\big).$

On se donne aussi $u_0 \in \mathbb{R}$ et la condition initiale

(2) $\quad u(0) = u_0.$

Pour la discrétisation du problème (1)(2) par la méthode des différences finies, on fixe un pas de temps $\Delta t > 0$ et on définit la fonction fonction $g(u)$ par

(3) $\quad g(u) = u - \Delta t\, f(u)\,, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}\,.$

a) Montrer que le schéma d'Euler implicite pour le modèle (1)(2) consiste, si on se donne u^n, à chercher u^{n+1} de sorte que $u^{n+1} - \Delta t\, f(u^{n+1}) = u^n$.

On suppose dans la suite que le pas de temps Δt est choisi tel que (4) $\quad \Delta t\, M < 1$.

b) Montrer que la fonction $g(u)$ est continue et strictement croissante.

c) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ de sorte que $g'(u) \geq \alpha$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que $g(u)$ tend vers $+\infty$ si u tend vers $+\infty$ et tend vers $-\infty$ si $u \longrightarrow -\infty$.

e) Déduire des questions précédentes que pour tout nombre réel b, l'équation $g(u) = b$ a une solution unique.

f) En déduire que quel que soit $u_0 \in \mathbb{R}$, les itérations du schéma d'Euler implicite pour le problème (1)(2) avec un pas de temps Δt qui satisfait à la relation (4) sont bien défines et permettent toujours de calculer u^{n+1} à partir de u^n.

François Dubois, mai 2017.

Exercice 2. Advection
On se donne un nombre réel $\alpha > 0$ et on cherche une fonction inconnue $u(x,t)$ qui satisfait à l'équation d'advection suivante

(1) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} - \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0\,.$

On se donne aussi une fonction $u_0(x)$ à une variable et la condition initiale

(2) $\quad u(x,0) = u_0(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

a) Montrer que si on se donne $y \in \mathbb{R}$ et qu'on pose $v(t) = u(y - \alpha\, t,\, t)$, alors la fonction $v(t)$ est constante.

b) En déduire une expression analytique de $u(x,t)$ en fonction des données α, u_0 et des arguments x et t.

On approche maintenant la fonction $u(x,t)$ par une méthode de différences finies. On se donne $\Delta x > 0$ et $\Delta t > 0$. Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, on cherche à calculer les valeurs discrètes $u_j^n \approx u(j\,\Delta x,\, n\,\Delta t)$. On a remplace dans l'équation (1) la dérivée partielle $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ par le schéma explicite en temps $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$ et la dérivée partielle $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ par le schéma décentré à droite $\dfrac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$.

c) Donner une formule explicite pour calculer u_j^{n+1} en fonction des paramètres du problème α, Δx et Δt et des données u_{j-1}^n, u_j^n et u_{j+1}^n à l'itération n.

On effectue une analyse de stabilité de von Neumann de ce schéma. On suppose qu'à l'instant $n\,\Delta t$, la fonction discrète u_j^n est une onde de vecteur d'onde K: $u_j^n = \widehat{u}_K \exp(i K\, j\, \Delta x)$. On pose $\xi = K\,\Delta x$.

d) Montrer qu'alors on a pour tout entier j, $u_{j+1}^n = \exp(i\,\xi)\, u_j^n$ et $u_{j-1}^n = \exp(-i\,\xi)\, u_j^n$.

e) En déduire que si on pose $\sigma = \dfrac{\alpha\,\Delta t}{\Delta x}$, l'itération du schéma se réduit à une suite géométrique :

(3) $\quad u_j^{n+1} = g(\sigma,\,\xi)\, u_j^n\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,,$

où l'on précisera la fonction $g(\sigma,\,\xi)$.

Le schéma est stable si cette suite géométrique (3) ne tend pas vers l'infini en module si l'entier n tend vers l'infini, c'est à dire si pour tout nombre d'onde ξ, le module de $g(\sigma,\,\xi)$ est inférieur ou égal à 1 : $|g(\sigma,\,\xi)| \le 1,\ \forall \xi \in \mathbb{R}\,.$

f) Montrer que le schéma numérique défini dans cet exercice à la question c) est stable si et seulement si $\sigma \le 1$.