le cnam

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Enoncés des exercices

Cours 01 — Equations différentielles

- Explosion en temps fini

On se propose d'étudier l'équation différentielle (1) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 + \big(u(t)\big)^2$ pour $t > 0$

avec la condition initiale (2) $u(0) = 0$.

a) Avec les méthodes usuelles de calcul d'intégration des équations différentielles, proposer une solution $u(t)$ pour le problème (1)(2).

On se propose maintenant de prouver que toute solution $u(t)$ de (1)(2) a effectivement la forme proposée à la question précédente. On pose $v(t) = \mathrm{atan}\big(u(t)\big)$.

b) Que vaut $v(0)$ à l'instant initial ?

c) Quelle équation différentielle simple est vérifiée par la fonction v ?

d) En déduire une valeur nécessaire de la fonction u.

e) Vérifier que cette fonction u est bien solution du problème (1)(2).

f) Dans quel intervalle de taille maximale peut-on définir la solution $u(t)$ du problème (1)(2) comme fonction continue de la variable t ?

- Convergence du schéma d'Euler explicite

a) Dans le cas de l'équation (1) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a\,u(t) = 0$ pour $t > 0$

avec $a > 0$ et la condition initiale (2) $u(0) = u_0$, montrer que le schéma d'Euler explicite pour le pas de temps Δt peut s'écrire à l'itération n : $u^n_{\Delta t} = \big(1 - a\,\Delta t\big)^n\, u_0$.

b) En déduire la convergence du schéma d'Euler vers la solution exacte du système (1)(2) : si $t = n\,\Delta t$ est fixé et si l'entier n tend vers l'infini, l'erreur $\varepsilon(t, \Delta t) \equiv |u^n_{\Delta t} - \exp(-a\,t)\, u_0|$ tend vers zéro si n tend vers l'infini. On pourra utiliser le fait que si θ est un nombre réel qui tend vers zéro, on peut écrire $\ln(1+\theta) = \theta\big(1 + \gamma(\theta)\big)$, où $\gamma(\theta)$ tend vers zéro si θ tend vers zéro.

- Stabilité du schéma de Crank-Nicolson

On se donne le schéma de Crank-Nicolson pour le modèle (1)(2) étudié à l'exercice précédent.

a) Montrer qu'il peut s'écrire $u^{n+1} = \dfrac{1 - \dfrac{a\,\Delta t}{2}}{1 + \dfrac{a\,\Delta t}{2}}\, u^n$.

b) En déduire qu'il est stable : la relation de la question a) définit une suite géométrique de raison toujours inférieure ou égale à 1 en valeur absolue.

François Dubois, mars 2018.

• Condition suffisante pour que le schéma de Crank-Nicolson soit bien défini.

On se donne maintenant un modèle non linéaire d'évolution : (3) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f\big(u(t)\big)$,

où $f(u)$ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un nombre positif M de sorte que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|f'(u)| \leq M$. On suppose dans la suite que le pas de temps Δt est choisi tel que $\Delta t\, M < 2$.

a) Montrer que le schéma de Crank-Nicolson pour le modèle (3)(2) consiste, si on se donne u^n, à chercher u^{n+1} de sorte que $u^{n+1} - \dfrac{\Delta t}{2} f(u^{n+1}) = u^n + \dfrac{\Delta t}{2} f(u^n)$.

b) Montrer que pour tout nombre réel b donné, l'équation $u - \dfrac{\Delta t}{2} f(u) = b$ a une solution unique. On pourra montrer que la fonction $g(u)$ définie par $g(u) \equiv u - \dfrac{\Delta t}{2} f(u)$ est continue, strictement croissante, qu'il existe $\alpha > 0$ de sorte que $g'(u) \geq \alpha$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, que $g(u)$ tend vers $+\infty$ si u tend vers $+\infty$ et tend vers $-\infty$ si u tend vers $-\infty$ avant de conclure.

c) Déduire des questions précédentes que dans ce cas non trivial, les itérations du schéma de Crank-Nicolson sont toujours bien définies, pour tout entier n.

• Une condition suffisante pour que le schéma d'Euler implicite soit bien défini
(contrôle du 12 mai 2017)

On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fois continuement dérivable telle qu'il existe un nombre strictement positif M de sorte que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|f'(u)| \leq M$. On considère le modèle non linéaire d'évolution :

(1) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f\big(u(t)\big)$.

On se donne aussi $u_0 \in \mathbb{R}$ et la condition initiale

(2) $u(0) = u_0$.

Pour la discrétisation du problème (1)(2) par la méthode des différences finies, on fixe un pas de temps $\Delta t > 0$ et on définit la fonction fonction $g(u)$ par

(3) $g(u) = u - \Delta t\, f(u)\,, \quad \forall u \in \mathbb{R}\,.$

a) Montrer que le schéma d'Euler implicite pour le modèle (1)(2) consiste, si on se donne u^n, à chercher u^{n+1} de sorte que $u^{n+1} - \Delta t\, f(u^{n+1}) = u^n$.

On suppose dans la suite que le pas de temps Δt est choisi tel que (4) $\Delta t\, M < 1$.

b) Montrer que la fonction $g(u)$ est continue et strictement croissante.

c) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ de sorte que $g'(u) \geq \alpha$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que $g(u)$ tend vers $+\infty$ si u tend vers $+\infty$ et tend vers $-\infty$ si $u \longrightarrow -\infty$.

e) Déduire des questions précédentes que pour tout nombre réel b, l'équation $g(u) = b$ a une solution unique.

f) En déduire que quel que soit $u_0 \in \mathbb{R}$, les itérations du schéma d'Euler implicite pour le problème (1)(2) avec un pas de temps Δt qui satisfait à la relation (4) sont bien défines et permettent toujours de calculer u^{n+1} à partir de u^n.

Cours 02 Oscillateur harmonique

• Une solution exacte de l'oscillateur harmonique

On se donne les nombres $\omega > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$ de sorte que $0 \leq \xi < 1$. On cherche une fonction $x(t)$ solution de l'oscillateur harmonique avec dissipation : (1) $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\,\xi\,\omega\,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2\,x(t) = 0$

avec la condition initiale (2) $x(0) = x_0\,,\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0.$

a) Montrer que l'équation (1) est linéaire : si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux solutions de (1), alors la somme $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ est encore une solution de (1). De plus, si λ est un nombre réel ou complexe arbitraire, la fonction $x(t) = \lambda\,x_1(t)$ est encore une solution de (1) si $x_1(t)$ est une solution de l'équation (1).

b) Montrer qu'on peut chercher des solutions particulières de l'équation (1) sous la forme $x(t) = \exp(rt)$. On écrira une équation pour le nombre complexe r, dite équation caractéristique, et on calculera toutes ses solutions.

c) Déduire des questions précédentes que l'équation (1) possède deux solutions particulières réelles $y_1(t) = \exp(-\xi\,\omega t)\cos(\varphi\,\omega t)$ et $y_2(t) = \exp(-\xi\,\omega t)\sin(\varphi\,\omega t)$, où φ est un nombre réel compris entre 0 et 1 que l'on précisera en fonction de ξ.

d) Montrer qu'une solution du système dynamique composé de l'équation (1) et de la condition initiale (2) peut s'écrire sous la forme $x(t) = a\,y_1(t) + b\,y_2(t)$. On précisera la valeur des coefficients a et b.

• Schéma d'Euler implicite pour l'oscillateur harmonique

a) Rappeler une écriture de l'équation du second ordre (3) $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\,x(t) = 0$ sous la forme d'un système du premier ordre (4) $\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + A\,U(t) = 0,$ où $U(t) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur colonne que l'on précisera construit à partir de $x(t)$ et $v \equiv \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

b) On se donne un pas de temps Δt. Ecrire le schéma d'Euler implicite pour le système (4).

c) Détailler les équations à résoudre pour calculer x^{n+1} et v^{n+1} au nouveau pas de temps en fonction de x^n, v^n et du paramètre ω problème.

d) Résoudre ces équations et calculer v^{n+1} d'une part, x^{n+1} d'autre part au nouveau pas de temps en fonction de x^n, v^n et ω.

• Une expression du schéma de Heun.

Pour un modèle différentiel non linéaire de la forme $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f\big(u(t)\big)$, le schéma de Heun construit u^{n+1} au nouveau pas de temps à partir de u^n avec le schéma "prédicteur-correcteur" suivant : $\widetilde{u}^{n+1} = u^n + \Delta t\,f(u^n),\ \ u^{n+1} = u^n + \dfrac{\Delta t}{2}\,\big[f(u^n) + f\big(\widetilde{u}^{n+1}\big)\big]$. Montrer qu'il peut aussi s'écrire sous la forme : $\widetilde{u}^{n+1} = u^n + \Delta t\,f(u^n),\ \widetilde{u}^{n+2} = \widetilde{u}^{n+1} + \Delta t\,f\big(\widetilde{u}^{n+1}\big),\ u^{n+1} = \dfrac{1}{2}\,\big(u^n + \widetilde{u}^{n+2}\big).$

Cours 03 Advection

- Stabilité du schéma explicite décentré.

On se donne $a > 0$ et l'équation d'advection de vitesse a: (1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} + a \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0.$

On met en place le schéma explicite décentré pour le pas d'espace $\Delta x > 0$ et le pas de temps $\Delta t > 0$: (2) $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0.$

On définit le nombre de Courant (ou de Courant - Friedrichs - Lewy) σ par la relation $\sigma \equiv \dfrac{a\,\Delta t}{\Delta x}$.

a) Si u_j^n à l'instant $n\,\Delta t$ est une onde de vecteur K, c'est à dire $u_j^n = \widehat{u}_K \exp(i K\, j\, \Delta x)$ pour tout entier j, montrer qu'on a $u_{j-1}^n = \exp(-i\,\xi)\, u_j^n$, avec le nombre d'onde ξ défini par $\xi \equiv K\,\Delta x$.

b) En déduire qu'avec l'hypothèse précédente, si u_j^{n+1} vérifie le schéma (2), on peut l'écrire sous la forme $u_j^{n+1} = g(\sigma,\, \xi)\, u_j^n$, où le coefficient d'amplification $g(\sigma,\, \xi)$ que l'on calculera ne dépend que du nombre de Courant σ et du nombre d'onde ξ.

On dit que le schéma (2) est stable au sens de von Neumann si et seulement si pour tout ξ appartenant à $\mathbb{R}$, on a (3) $|g(\sigma,\, \xi)| \leq 1$.

c) Montrer que si le schéma (2) est stable au sens de von Neumann, on a nécessairement (4) $0 \leq \sigma \leq 1$. On pourra choisir $\xi = \pi$ dans la relation (3).

d) Montrer que si la condition (4) est satisfaite, alors le schéma (2) est stable au sens de von Neumann : la relation (3) est satisfaite pour tout nombre réel ξ.

- Instabilité du schéma explicite centré en espace

Pour l'équation d'advection (1) définie à l'exercice précédent, on propose de metre en œuvre le schéma explicite en temps et centré en espace défini par la relation

(5) $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\,\Delta x} = 0.$

a) Si u_j^n à l'instant $n\,\Delta t$ est une onde de vecteur K, c'est à dire $u_j^n = \widehat{u}_K \exp(i K\, j\, \Delta x)$ pour tout entier j, montrer qu'on a $u_{j-1}^n = \exp(-i\,\xi)\, u_j^n$ et $u_{j+1}^n = \exp(i\,\xi)\, u_j^n$, avec le nombre d'onde ξ défini par $\xi \equiv K\,\Delta x$.

b) En déduire qu'avec l'hypothèse précédente, si u_j^{n+1} vérifie le schéma (5), on peut l'écrire sous la forme $u_j^{n+1} = g(\sigma,\, \xi)\, u_j^n$, où le coefficient d'amplification $g(\sigma,\, \xi)$, que l'on calculera, ne dépend que du nombre de Courant $\sigma \equiv \dfrac{a\,\Delta t}{\Delta x}$ et du nombre d'onde ξ.

c) Montrer que le schéma (5) n'est jamais stable au sens de von Neumann : pour tout $\Delta t > 0$, il existe $\xi \in \mathbb{R}$ de sorte que $|g(\sigma,\, \xi)| > 1$.

- Calcul avec des dérivées partielles

Vérifier la relation

(6) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(X(t),\, Y(t)\big) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}$

dans le cas particulier suivant : $f(x,\, y) = a x^2 + 2 b x y + c y^2$, $X(t) = \cos t$ et $Y(y) = \sin t$. On calculera séparément le membre de droite et le membre de gauche de la relation (6) et on constatera leur égalité.

• Advection avec une vitesse négative (contrôle du 12 mai 2017)

On se donne un nombre réel $\alpha > 0$ et on cherche une fonction inconnue $u(x, t)$ qui satisfait à l'équation d'advection suivante

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \alpha \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \,, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0 \,.$

On se donne aussi une fonction $u_0(x)$ à une variable et la condition initiale

(2) $u(x, 0) = u_0(x) \,, \quad x \in \mathbb{R} \,.$

a) Montrer que si on se donne $y \in \mathbb{R}$ et qu'on pose $v(t) = u(y - \alpha t, t)$, alors la fonction $v(t)$ est constante.

b) En déduire une expression analytique de $u(x, t)$ en fonction des données α, u_0 et des arguments x et t.

On approche maintenant la fonction $u(x, t)$ par une méthode de différences finies. On se donne $\Delta x > 0$ et $\Delta t > 0$. Pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, on cherche à calculer les valeurs discrètes $u_j^n \approx u(j \Delta x, n \Delta t)$. On a remplace dans l'équation (1) la dérivée partielle $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ par le schéma explicite en temps $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$ et la dérivée partielle $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ par le schéma décentré à droite $\dfrac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$.

c) Donner une formule explicite pour calculer u_j^{n+1} en fonction des paramètres du problème α, Δx et Δt et des données u_{j-1}^n, u_j^n et u_{j+1}^n à l'itération n.

On effectue une analyse de stabilité de von Neumann de ce schéma. On suppose qu'à l'instant $n \Delta t$, la fonction discrète u_j^n est une onde de vecteur d'onde K: $u_j^n = \widehat{u}_K \, \exp(i K j \Delta x)$. On pose $\xi = K \Delta x$.

d) Montrer qu'alors on a pour tout entier j, $u_{j+1}^n = \exp(i \xi) \, u_j^n$ et $u_{j-1}^n = \exp(-i \xi) \, u_j^n$.

e) En déduire que si on pose $\sigma = \dfrac{\alpha \Delta t}{\Delta x}$, l'itération du schéma se réduit à une suite géométrique :

(3) $u_j^{n+1} = g(\sigma, \xi) \, u_j^n \,, \quad j \in \mathbb{Z} \,,$

où l'on précisera la fonction $g(\sigma, \xi)$.

Le schéma est stable si cette suite géométrique (3) ne tend pas vers l'infini en module si l'entier n tend vers l'infini, c'est à dire si pour tout nombre d'onde ξ, le module de $g(\sigma, \xi)$ est inférieur ou égal à 1 : $|g(\sigma, \xi)| \leq 1, \ \forall \xi \in \mathbb{R}$.

f) Montrer que le schéma numérique défini dans cet exercice à la question c) est stable si et seulement si $\sigma \leq 1$.

Cours 04 — Equation de la chaleur

• Précision des schémas aux différences

On se donne les fonctions $f(x) = x + x^2 - x^3$ et $g(x) = f(x) - x^4$. On se donne aussi un “petit incrément” $h = \frac{1}{100}$.

a) Calculer les nombres dérivés $f'(0)$, $f''(0)$ et $g''(0)$.

b) Calculer l'approximation aux différences finies à droite $\Delta_+ f(0) \equiv \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ de la dérivée $f'(0)$. Donner un ordre de grandeur de l'erreur $\varepsilon_+(h) \equiv |\Delta_+ f(0) - f'(0)|$.

c) Même question avec l'approximation aux différences finies à gauche $\Delta_- f(0) \equiv \dfrac{f(0) - f(-h)}{h}$. Donner un ordre de grandeur de l'erreur $\varepsilon_-(h) \equiv |\Delta_- f(0) - f'(0)|$.

d) Même question avec l'approximation aux différences finies centrée $\Delta_0 f(0) \equiv \dfrac{f(h) - f(-h)}{2h}$. On donnera un ordre de grandeur de l'erreur $\varepsilon_0(h) \equiv |\Delta_0 f(0) - f'(0)|$.

e) On s'intéresse maintenant à l'approximation de la dérivée seconde $f''(0)$ par le schéma à trois points vu en cours : $\Delta^2 f(0) \equiv \dfrac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}$. Calculer la valeur numérique de cette expression pour la fonction f et la valeur de h proposée plus haut. Que remarquez-vous ?

f) On change de fonction et on approche $g''(0)$ par le schéma à trois points : $\Delta^2 g(0) \equiv \dfrac{g(h) - 2g(0) + g(-h)}{h^2}$. Calculer la valeur numérique de cette expression et un ordre de grandeur de l'erreur $\varepsilon_2(h) \equiv |\Delta^2 g(0) - g''(0)|$.

• Solution analytique de l'équation de la chaleur avec une série de Fourier

Si on se donne une fonction périodique $v(x)$ de période $P > 0$ on sait que l'on peut (sous des conditions que nous ne rappellerons pas ici) écrire la fonction $v(x)$ comme somme de sa série de Fourier : (1) $\quad v(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k \cos\Big(\dfrac{2k\pi}{P}\Big) + b_k \sin\Big(\dfrac{2k\pi}{P}\Big) \Big]$.

Les coefficients de Fourier a_k et b_k satisfont à la propriété suivante : si la fonction $v(x)$ est paire ($v(-x) = v(x)$ pour tout x), alors les coefficients b_k sont tous nuls. De même, si $v(x)$ est impaire ($v(-x) = -v(x)$ pour tout x), alors les coefficients a_k (et en particulier a_0) sont tous nuls.

On se donne un nombre $L > 0$ et une fonction u_0 définie sur l'intervalle $[0, L]$ qui satisfait de plus à (2) $\quad u_0(0) = u_0(L) = 0$.

a) Montrer qu'on peut étendre la fonction u_0 en une fonction u_1 impaire définie sur l'intervalle $[-L, L]$.

b) Montrer qu'on peut étendre la fonction u_1 en une fonction $\widetilde{u}_1$ définie su $\mathbb{R}$ et périodique de période $2L$.

c) Montrer que le développement en série de Fourier de la fonction $\widetilde{u}_1$ peut s'écrire sous la forme (3) $\quad \widetilde{u}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\Big(\dfrac{k\pi}{L}\Big)$.

d) Déduire des questions précédentes et de ce qui a été vu en cours une expression analytique de la solution $u(x, t)$ de l'équation de la chaleur ayant comme condition initiale la fonction u_0, avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Cours 05 Schéma implicite pour l'équation de la chaleur

• Factorisation de Gauss pour un système linéaire deux par deux

Si on se donne la matrice A définie par (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et un vecteur colonne B arbitraire dans $\mathbb{R}^2$: $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

On cherche à résoudre le système linéaire (2) $AX = B$.

a) Montrer qu'on peut trouver deux matrices $L \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ et $U \equiv \begin{pmatrix} p & r \\ 0 & q \end{pmatrix}$ de sorte que $LU = A$. On déterminera les quatre nombres a, p, q et r.

b) En introduisant un vecteur auxiliaire Y, montrer que la résolution de l'équation (2) se ramène à la résolution successive de deux systèmes linéaires : d'abord $LY = B$ puis ensuite $UX = Y$.

c) Achever la sésolution du système linéaire (2).

• Factorisation de Gauss pour un système linéaire trois par trois

Reprendre l'exercice précédent avec la matrice A donnée par la relation

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et un vecteur colonne B arbitraire dans $\mathbb{R}^3$: $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

On introduira les matrices $L \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ et $U \equiv \begin{pmatrix} p & r & u \\ 0 & q & t \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$ et on déterminera les coefficients a, b, c, p, q, r, s, t et u de sorte que $LU = A$. On achèvera la resolution du système linéaire $AX = B$ avec la méthode proposée à l'exercice précédent.

• Factorisation de Cholesky (contrôle de septembre 2017)

a) On se donne la matrice A_2 à deux lignes et deux colonnes suivante : $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On cherche des matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} \beta & \delta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ de sorte que la factorisation de Gauss $A_2 = GU$ soit satisfaite. Calculer les valeurs des nombres α, β, γ et δ.

b) On se propose maintenant de réaliser la factorisation de Cholesky de la matrice symétrique A_2. Soit $L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$ une matrice telle que $a > 0$ et $b > 0$. On rappelle que la transposée L^{t} de la matrice L s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes. Calculer les nombres réels $a > 0$, $b > 0$ et c de sorte que $A_2 = L\,L^{\mathrm{t}}$.

c) Vérifier que la matrice L trouvée à la question b) satisfait effectivement à la relation $L\,L^{\mathrm{t}} = A_2$.

d) On reprend la question b) en passant à une matrice à trois lignes et trois colonnes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 13 & -10 \\ 0 & -10 & 41 \end{pmatrix}$. On pose maintenant $L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & e & d \end{pmatrix}$. Déterminer les coefficients a, b, c, d et e avec $a > 0$, $b > 0$ et $d > 0$ de sorte que $A = L\,L^{\rm t}$.

e) On cherche à résoudre le système linéaire $A\,X = B$ avec la matrice A introduite à la question d) et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}$. Calculer la solution Y du système linéaire $LY = B$.

f) Avec les données et les notations des questions d) et e), calculer la solution Z du système linéaire $L^{\rm t}\,Z = Y$.

g) Avec les données et les notations des questions d), e) et f), en déduire la solution X du système linéaire $A\,X = B$.

Cours 06 Problème de Poisson à une dimension d'espace

• Solution analytique élémentaire

Montrer avec un calcul simple de solution d'une équation différentielle que le problème de Dirichlet homogène

(1) $$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = 0\,, \quad u(0) = u(1) = 0$$

a pour seule solution la fonction nulle.

• Une autre solution analytique élémentaire

On remplace l'une des conditions de Dirichlet du problème (1) par une condition de Neumann :

(2) $$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = 3\,, \quad u(0) = 0\,, \quad -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(1) = 4.$$

Calculer l'unique solution du problème (2).

• Modes du Laplacien à une dimension spatiale

On dit que λ est valeur propre pour le Laplacien si il existe une fonction $u(x)$ **non identiquement nulle** telle que :

(3) $$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = \lambda\, u(x)\,, \quad 0 < x < 1 \\ \quad u(0) = u(1) = 0\,. \end{cases}$$

La fonction $u(x)$ est alors un vecteur propre (ou "mode") du Laplacien. On se propose dans cet exercice de déterminer tous le modes du Laplacien à une dimension d'espace.

a) Montrer que $\lambda = 0$ n'est pas solution du problème (3).

b) Si $\lambda \equiv -\alpha^2$ est strictement négatif, montrer qu'à nouveau, cette valeur de λ n'est pas solution du problème (3).

c) Montrer que $\lambda \equiv K^2$ strictement positif est solution du problème (3) si et seulement si K est un multiple entier de π, c'est à dire λ de la forme $\lambda = (n\pi)^2$ avec n entier supérieur ou égal à 1.

• Représentation intégrale de la solution du Laplacien à une dimension spatiale

On se donne $L > 0$. Pour x et y entre 0 et L, on pose

(4) $$G_y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{L}\, x\,(L-x) \text{ si } x \le y \\ \dfrac{1}{L}\, y\,(L-x) \text{ si } x \ge y\,. \end{cases}$$

On se donne aussi une fonction arbitraire $f(x)$ définie sur l'intervalle $[0, L]$. On pose enfin

(5) $$u(x) = \int_0^L G_y(x)\, f(y)\, \mathrm{d}y\,.$$

Montrer que cette fonction est solution du problème de Dirichlet

(6) $$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = f(x)\,, \quad u(0) = u(1) = 0$$