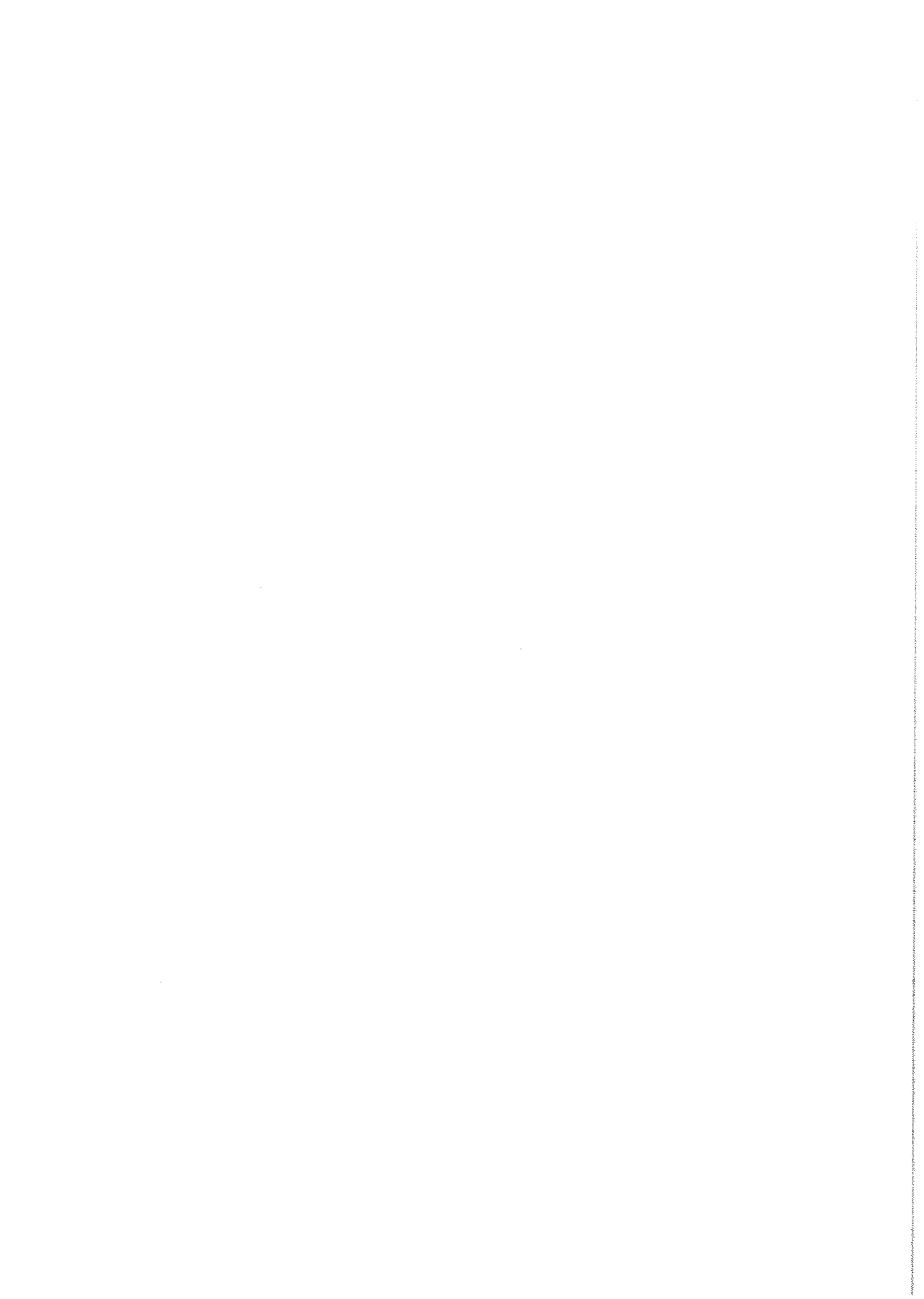


**Conservatoire National des Arts et Métiers**

**Introduction aux Différences  
Finies et aux Éléments Finis**

**Cours IDEF 1995-1996**

**François DUBOIS**



**Conservatoire National des Arts et Métiers**

**Introduction aux Différences Finies  
et aux Éléments Finis**

**COURS 1995/1996**

**François DUBOIS**



# IDEF

## Introduction aux Différences Finies et aux Éléments Finis

### PLAN

#### I) **Motivation : équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles**

- 1) Quelques modèles conduisant à des équations différentielles ordinaires
  - Placement financier
  - Système masse-ressort
  - Système masse-ressort avec amortissement fluide
  - Circuit électrique RLC
  - Mouvement d'un satellite
  - Cinétique chimique
  - Météorologie : attracteur de Lorenz
  - Définition
  
- 2) Quelques modèles conduisant à des équations aux dérivées partielles
  - Préambule
  - Diffusion de la chaleur à une dimension d'espace
  - Résistance des matériaux : élasticité tridimensionnelle
  - Résistance des matériaux : flexion des poutres
  - Membrane vibrante (tambour)
  - Mécanique des fluides : équations de Navier-Stokes des fluides incompressibles
  - Mécanique des fluides : équations d'Euler de la dynamique des gaz
  - Equation des ondes acoustiques
  - Electromagnétisme : équations de Maxwell
  - Equation d'advection : diffusion à une dimension d'espace
  - Physique moléculaire : équation de Schrödinger

## **II) Différences finies pour les équations différentielles ordinaires**

- 1) Schémas aux différences : première approche
- 2) Test des schémas d'Euler explicite, Euler implicite et Crank-Nicolson pour le modèle  $\frac{du}{dt} + \lambda u = 0$  ( $\lambda > 0$ ).
  - Définition : méthode à un pas
- 3) Exemples de méthodes multipas
  - Schéma instable
  - Schéma d'Adams-Bashford
- 4) Schémas à un pas explicites précis
  - Schéma d'Euler modifié
  - Schéma de Heun
  - Schéma de Runge-Kutta
- 5) Ordre d'un schéma aux différences
- 6) Mémoire

## **III) Différences finies pour l'équation d'advection à une dimension d'espace**

- 1) Equation d'advection à une dimension d'espace.
- 2) Discrétisation en espace et en temps
- 3) Analyse de stabilité par Fourier
- 4) Quelques propriétés de deux schémas classiques
- 5) Problème à valeur initiale et à la limite

## **IV) Différences finies pour l'équation de la chaleur à une dimension d'espace**

- 1) Modèle physico-mathématique
- 2) Schéma aux différences explicite à une dimension
- 3)  $\theta$ -Schéma en temps
- 4) Schémas à trois niveaux en temps

## **V) Différences finies pour l'équation de Poisson à deux dimensions d'espace**

- 1) Discrétisation par différences finies
- 2) Formation du système linéaire
- 3) Résolution du système linéaire

## **VI) Introduction à l'écriture variationnelle des problèmes elliptiques**

- 1) Motivation
- 2) Problème de Dirichlet homogène pour l'équation de Poisson
- 3) Problème de Dirichlet non homogène pour l'équation de Poisson
- 4) Problème mixte pour l'équation de Poisson
- 5) Problème de Neumann pour l'équation de Poisson

## **VII) Introduction à la méthode des éléments finis**

- 1) Introduction
- 2) Problème de Dirichlet à une dimension d'espace
- 3) Problème de Dirichlet à deux dimensions d'espace

## **VIII) Mise en oeuvre informatique de la méthode des éléments finis**

- 1) Introduction
- 2) Mise en oeuvre d'un problème monodimensionnel
- 3) Mise en oeuvre de l'élément P1 dans  $\mathbb{R}^2$
- 4) Condition de Dirichlet non homogène
- 5) Etude d'un exemple, dit "Hadhri"

## **IX) Compléments**

- (i) Formule d'intégration par parties
- (ii) Algorithme du gradient conjugué
- (iii) Etude du schéma de Newmark

## **X) Travaux pratiques**

- (i) Etude du schéma de Newmark
  - I) Calcul d'une intégrale par la méthode des trapèzes
  - II) Schéma de Newmark
  - III) Précision du schéma de Newmark
  
- (ii) Régularisation d'une fonction par résolution d'un opérateur elliptique
  - I) Principe de la méthode numérique
  - II) Organisation du code de calcul (programme)
  - III) Précision du schéma de Newmark